Физико-математические науки

УДК 519.219

О двух тауберовых теоремах для хвостов функций распределения*

[1] Арсен Рафикович Симонян
[2] Елена Ивановна Улитина
[3] Ирина Павловна Лопатина

[1-3] Сочинский государственный университет, Российская Федерация
354000, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а
[1] Кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: oppm@mail.ru
[2] Кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: ulitinaelena@mail.ru
[3] Преподаватель
E-mail: iralopatina@rambler.ru

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №12-01-00196а

Аннотация. В статье прямым методом доказаны две тауберовы теоремы для хвостов функций распределения неотрицательных дискретных и непрерывных случайных величин в предположении правильного изменения хвостов. Первая из них относится к производящим функциям, а вторая – к преобразованиям Лапласа-Стильтеса. Вторая теорема ранее была установлена К.Ньюэлсом непрямым методом обращения к теоремам сходимости к устойчивым законам.

Ключевые слова: предельные теоремы; теория вероятностей; теория массового обслуживания; медленно меняющиеся функции; тауберовы теоремы.

Введение. Правильно меняющиеся функции находят широкое применение в теории вероятностей [1-2], особенно в предельных теоремах теории массового обслуживания [3-9].

Определение. Измеримая на $R^+ = (0,+\infty)$ функция $R(\mathrm{t}) > 0$ правильно меняется при $\mathrm{t} \to +\infty$ с показателем $\rho \in R^1 = (-\infty,+\infty)$, если она представима в виде

$$R(\mathrm{t}) = t^{\rho} \cdot L(t),\ t \in R^+, \tag{1}$$

где для любого $x \in R^+$

$$\lim_{t\to+\infty} (L(xt)/L(t)) = 1. \tag{2}$$

Функцию $L(t)$ называют *медленно меняющейся* при $t \to +\infty$. В дальнейшем буква L используется для обозначения медленного изменения.

К основным методам анализа правильно меняющихся мер в теории вероятностей относятся тауберовы теоремы с правильным изменением. Первая такая теорема доказана И.Караматой [10].

Пусть W - мера на $[0,+\infty)$, и существует

$$\omega(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} dW(x),\ s > 0.$$

Теорема Караматы. ***Для*** $0 \le \rho < +\infty$ ***соотношения***

$$\omega(s) \sim s^{-\rho} \cdot L(1/s),\ s \downarrow 0 \tag{3}$$

и

$$W(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \cdot x^{\rho} \cdot L(x),\ x \to +\infty,$$

где $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция Эйлера, эквивалентны.

Более того, если W имеет монотонную производную w, то соотношения (3) и

$$w(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} \cdot x^{\rho-1} \cdot L(x),\ x \to +\infty \qquad (4)$$

при $0 < \rho < +\infty$ эквивалентны, ▷

Здесь $f(t) \sim g(t)$, $t \to a$, *если* $\lim\limits_{t \to a}(f(t)/g(t)) = 1.$

Приведем аналог второй части теоремы Караматы для дискретных мер (см. [2], с. 503-504).

Пусть $p_s \geq 0$ и ряд $F(z) = \sum\limits_{s \geq 0} p_s \cdot z^s$ сходится при $0 \leq z < 1$. Если $\{p_s\}$ монотонна и $0 < \rho < +\infty$, то соотношения эквивалентны

$$F(z) \sim \frac{1}{(1-z)^{\rho}} \cdot L\left(\frac{1}{1-z}\right),\ z \uparrow 1 \qquad (5)$$

и

$$p_s \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} \cdot n^{\rho-1} \cdot L(n),\ n \to +\infty \qquad (6)$$

Теорема Караматы дала всплеск исследованиям по хвостам функций распределения (ФР). Множество тауберовых теорем для хвостов ФР получено в [11] *непрямым* методом обращения к предельным теоремам сходимости к устойчивым законам.

В настоящей работе предлагается *прямой* способ доказательства двух таких тауберовых теорем, одна из которых сформулирована в [11].

Результаты. Пусть $\nu \geq 0$ – целочисленная СВ с распределением $\{p_s = P(\nu = s)\}$ и с производящей функцией вероятностей (ПФВ)

$$F(z) = Mz^{\nu} = \sum_{s \geq 0} p_s \cdot z^s,\ 0 \leq z \leq 1,$$

где M - знак математического ожидания, а

$f_r = \sum\limits_{s \geq r} s \cdot (s-1) \ldots (s-r+1) \cdot p_s$, $r \geq 1$ – r-тый факториальный момент СВ ν.

Если $M\nu^m < +\infty$ при некотором целом $m \geq 1$, то $f_r < +\infty$ при $r = \overline{1,m}$. При $M\nu^m < +\infty$ положим

$$F^k(z) = F(z) - \sum_{r=0}^{k} f_r \cdot (z-1)^r,\ f_0 = 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ k = \overline{0,m}.$$

Для нецелого α, где $m < \alpha < m+1,\ m \geq 0$ — целое число, обозначим

$$C_{\alpha,m} = \frac{\Gamma(\alpha - m) \cdot \Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(-1)^m \cdot \pi}{\Gamma(\alpha) \cdot \sin \pi\alpha} > 0. \qquad (7)$$

Теорема 1. Соотношения

$$P(\nu > n) \sim n^{-\alpha} \cdot L(n),\ n \to +\infty \qquad (8)$$

и

$$F^{[m]}(z) \sim (-1)^{m+1} \cdot C_{\alpha,m} \cdot (1-z)^{\alpha} \cdot L\left(\frac{1}{1-z}\right),\ z \uparrow 1. \qquad (9)$$

эквивалентны. ▷

Здесь P - знак вероятности.

Доказательство теоремы 1 опирается на три леммы. Пусть $\nu_1 = \nu$, $F_1 = F$, $F_1^{[m]} = F^{[m]}$, $f_{1,r} = f_r$, $f_{1,0} = 1$.

При $M\nu_1^m < +\infty$ рассмотрим функции

$$F_{r+1}(z) = \frac{f_{1,r-1}}{f_{1,r}} \cdot \frac{1-F_r(z)}{1-z},\ r = \overline{1,m},\ 0 \le z \le 1 \qquad (10)$$

Лемма 1. Пусть $M\nu_1^m < +\infty$. Тогда:

а) $F_{r+1}(z)$ - ПФВ при $r = \overline{1,m}$ некоторой целочисленной СВ $\nu_{r+1} \ge 0$;

б) $M\nu_{r+1}^{m-r} < +\infty$ при $r = \overline{1,m}$ и

$$f_{r+1,k} = \frac{f_{1,k+r}}{f_{1,r}},\ k = \overline{1,m-r}, \qquad (11)$$

где $f_{r+1,k}$ - k-тый факториальный *момент СВ* ν_{r+1};

в) $$P(\nu_{r+1} > n) = \frac{f_{1,r-1}}{f_{1,r}} \cdot \left(\sum_{s>n} P(\nu_r > s)\right),\ n \ge 1,\ r = \overline{1,m}. \qquad (12)$$

Лемма 2. При $m < \alpha < m+1$, $m \ge 0$ — целое число, соотношения (9) и

$$1 - F_{m+1}(z) \sim \frac{1}{f_{1,m}} \cdot C_{\alpha,m} \cdot (1-z)^{\alpha-m} \cdot L\left(\frac{1}{1-z}\right),\ z \uparrow 1 \qquad (13)$$

эквивалентны. ▷

Лемма 3. При $m < \alpha < m+1$, $m \ge 0$ — целое число, *соотношения (8) и*

$$P(\nu_{m+1} > n) \sim \frac{1}{f_{1,m}} \cdot \left(\prod_{r=1}^{m} (\alpha - r)\right)^{-1} \cdot n^{-(\alpha-m)} \cdot L(n),\ n \to +\infty \qquad (14)$$

эквивалентны. ▷

Пусть $E(x)$ - ФР на $[0,+\infty)$. Положим

$$e_n = \int_0^\infty x^n dE(x),\ n \ge 0,\ e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dE(x),\ s \ge 0$$

и при $e_n < +\infty$ пусть

$$e^{[n]}(s) = e(s) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-s)^i}{i!} e_i.$$

Теорема 2 (Ньюэлс). При $n < \alpha < n+1$, $n \ge 0$ — целое число, соотношения

$$1 - E(x) \sim x^{-\alpha} L(x),\ x \to +\infty \qquad (15)$$

и

$$e^{[n]}(s) \sim (-1)^{n+1} \cdot C_{\alpha,n} \cdot s^{\alpha} \cdot L(1/s),\ s \downarrow 0 \qquad (16)$$

эквивалентны. ▷

Доказательство теоремы 2 опирается на три леммы.

Пусть $E_1(x) = E(x)$, $e_1(s) = e(s)$, и для некоторого целого $n \geq 0$ пусть $e_{1,n} = e_n < +\infty$. Рассмотрим функции

$$E_{k+1}(x) = \frac{1}{e_{k,1}} \cdot \int_{0-}^{x} (1 - E_k(u))du, \; k = \overline{1,n}, \; x \geq 0,$$

где

$$e_{k,m} = \int_0^\infty x^m dE_k(x), \; m \geq 1.$$

Лемма 4. При $e_{1,n} < +\infty, \; n \geq 1$ константы $e_{k,1}$ конечны и

$$e_{k,1} = \frac{e_{1,k}}{k \cdot e_{1,k-1}}, \; k = \overline{1,n}, \tag{17}$$

а $E_{k+1}(x)$ - ФР на $[0,+\infty)$. ▷

Лемма 5. При $n < \alpha < n+1, \; n \geq 1$ – целое число, соотношения (16) и

$$1 - e_{n+1}(s) \sim \frac{n!}{e_{1,n}} \cdot C_{\alpha,n} \cdot s^{\alpha-n} \cdot L(1/s), \; s \downarrow 0 \tag{18}$$

эквивалентны. ▷

Лемма 6. При $n < \alpha < n+1, \; n \geq 1$ – целое число, соотношения (15)

$$1 - E_{n+1}(t) \sim \frac{e_{1,n}}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k) \cdot t^{-(\alpha-n)} \cdot L(t), \; t \to +\infty \tag{19}$$

эквивалентны. ▷

Доказательство теоремы 1 и лемм 1-3, теоремы 2 и лемм 4-6 приведены в приложениях 1,2 соответственно.

Приложение 1. *Доказательство леммы 1.* Установим а)-в) при $r = 1$. Так как (напомним, что $f_{1,0} = 1$

$$\lim_{z \uparrow 1} \frac{1 - F_1(z)}{1 - z} = \left.\frac{dF_1(z)}{dz}\right|_{z=1} = M\nu_1 = f_{1,1} < +\infty,$$

то

$$F_2(z) = \sum_{s \geq 0} \frac{p_{1,s+1}}{f_{1,1}} \cdot \left(\sum_{k \geq 0} z^k \right) = \sum_{s \geq 0} p_{2,z} \cdot z^s, \qquad 0 \leq z \leq 1,$$

где $p_{2,s} \geq 0$ при $s \geq 0$ и $F_2(1) = \sum_{s \geq 0} p_{2,s} = 1$. Следовательно, $F_2(z)$ - ПФВ некоторой целочисленной СВ $\nu_2 \geq 0$.

Далее,

$$F_2(z) = \sum_{k=0}^{m} f_{2,k} \cdot (z-1)^k + F_2^{[m-1]}(z), \qquad 0 \leq z \leq 1,,$$

где

$$F_2^{[m-1]}(z) = -\frac{F_1^{[m]}(z)}{f_{1,1}\cdot(1-z)} = o\left((1-z)^{m-1}\right) \text{ при } z\uparrow 1$$

и, из-за $M\nu_1^m < +\infty$,

$$f_{2,k} = \sum_{s\ge k} s\cdot(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-k+1)\cdot p_{2,s} = \frac{f_{1,k+1}}{f_{1,1}} < +\infty, \qquad k=\overline{1,m-1}. \quad (20)$$

Отсюда следует $M\nu_2^{m-1} < +\infty$.

Наконец, рассмотрим функцию

$$\sum_{s\ge 0} P(\nu_1 > s)\cdot z^s = \sum_{k\ge 1} P(\nu_1 = k)\cdot\frac{z^k-1}{z-1} = f_{1,1}\cdot F_2(z) = \sum_{s\ge 0} f_{1,1}\cdot P(\nu_2 = s)\cdot z^s,$$
$$0\le z\le 1.$$

Следовательно, $P(\nu_1) > s) = f_{1,1}\cdot P(\nu_2 = s), s\ge 0$, откуда следует (12) при $r=1$. ▷

Докажем а)-в) индукцией по r. Пусть а)-в) верны для $F_{k+1}(z)$ при $k=1,2,\ldots,r$.

Покажем, что а)-в) верны для $F_{r+2}(z)$, приняв случай $r=1$ за основание индукции.

Поскольку, по (11), $f_{r+1,1} = \dfrac{f_{1,r+1}}{f_{1,r}}$, то

$$F_{r+2}(z) = \frac{1-F_r(z)}{f_{r+1,1}\cdot(1-z)}, \quad 0\le z\le 1.$$

Теперь, аналогично случаю $r=1$ устанавливаем, что: $F_{r+2}(z)$ - ПФВ некоторой целочисленной СВ $\nu_{r+2}\ge 0$, $M\nu_{r+2}^{m+r-1} < +\infty$, для ν_{r+2} верно (12) и

$$f_{r+2,k} = \frac{f_{r+1,k+1}}{f_{r+1,1}} < +\infty \text{ при } k=\overline{1,m-r-1}. \quad (21)$$

Из (21), по индукционному предположению (см.[11]), имеем (11) для ν_{r+2}. ▷

Доказательство леммы 2. В силу (11), проверяем, что (9) эквивалентно соотношению

$$F^{[m-1]}(z) \sim (-1)^m\cdot C_{\alpha,m}\cdot\frac{1}{f_{1,1}}\cdot L\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad z\uparrow 1.$$

Аналогично, при $r=\overline{2,m}$, с учетом равенства (см.(11))

$$\prod_{k=1}^{r} f_{k,1} = \prod_{k=1}^{r}(f_{1,k}/f_{1,k-1}) = f_{1,r},$$

получаем, что (9) эквивалентно соотношениям

$$F^{[m-r]}(z) \sim (-1)^{m-r+1}\cdot(1-z)^{\alpha-r}\cdot C_{\alpha,m}\cdot\frac{1}{f_{1,r}}\cdot L\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad z\uparrow 1,$$

откуда при $r=m$ выводим утверждение *леммы 2*. ▷

Доказательство леммы 3. По теор.1, гл.8, с.322 [2] и (12) имеем: при $m<\alpha<m+1$, $m\ge 1$ соотношения

$$P(\nu_{m+1}\ge n) \sim c_{r+1}\cdot n^{-(\alpha-r)}\cdot L(n), \quad n\to+\infty, \quad r=\overline{0,m}$$

эквивалентны при наличии равенств $c_{r+1} = (\alpha - r) \cdot \dfrac{f_{1,r}}{f_{1,r-1}} \cdot c_r$. Поэтому, замечая, что

$$c_{m+1} = c_1 \cdot \prod_{r=1}^{m} \left(\frac{(\alpha - r) \cdot f_{1,r}}{f_{1,r-1}} \right) = c_1 \cdot f_{1,m} \cdot \prod_{r=1}^{m} (\alpha - r)$$

и, полагая $c_1 = 1$, завершаем доказательство. ▹

<u>Доказательство *теоремы 1.*</u> Пусть верно (8). По *лемме 3,* верно (14), что по теор.5, гл.8, с.503-504 [2] эквивалентно соотношению

$$1 - F_{m+1}(z) \sim \frac{\Gamma(m+1-\alpha)}{f_{1,m} \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - m)} \cdot (1-z)^{\alpha - m} \cdot L\left(\frac{1}{1-z} \right), \quad z \uparrow 1.$$

Для вывода (9) осталось использовать равенства

$$\Gamma(m+1-\alpha) = (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - m) \cdot C_{\alpha,m}.$$

Те же аргументы и *леммы 2-3* позволяют получить (8) из (9). ▹

Приложение 2. <u>Доказательство леммы 4.</u> *Имеем*

$$e_{k,m} = \int_{0-}^{\infty} x^m dE_k(x) = \frac{1}{(m+1) \cdot e_{k-1,1}} \int_{0-}^{\infty} x^{m+1} dE_{k-1}(x),$$

$$\int_{0-}^{\infty} x^m (1 - E_{k-1}(x)) dx = \frac{1}{(m+1)} \int_{0-}^{\infty} x^{m+1} dE_{k-1}(x) = \frac{e_{k-1,m+1}}{m+1}.$$

Следовательно,

$$e_{k,m} = \frac{e_{k-1,m+1}}{(m+1) \cdot e_{k-1,1}}, \quad m = \overline{1, n-k+1}. \tag{22}$$

Тогда

$$e_{k,1} = \frac{e_{k-1,2}}{2 \cdot e_{k-1,1}} = \frac{e_{k-2,3}}{3 \cdot e_{k-2,2}} = \ldots = \frac{e_{1,k}}{k \cdot e_{1,k-1}} < +\infty, \quad k = \overline{1,n},$$

откуда следует (17).

Далее, так как $e_{k,1} < +\infty$ и $E_k(x)$ - ФР на $[0,+\infty)$, то $E_{k+1}(x)$ - ФР на $[0,+\infty)$.

<u>*Доказательство леммы 5*</u>. В силу (22), проверяем, что (16) эквивалентно соотношению

$$e_2^{[n-1]}(s) \sim (-1)^n \cdot \frac{1}{e_{1,1}} \cdot C_{\alpha,n} \cdot s^{\alpha - 1} \cdot L(1/s), \quad s \downarrow 0,$$

где $e_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dE_2(x)$.

Аналогично, при $k = \overline{2,n}$, с учетом равенства (см.(22))

$$\prod_{i=1}^{k} e_{i,1} = \prod_{i=2}^{k} \frac{e_{1,i}}{i \cdot e_{1,i-1}} \cdot e_{1,1} = \frac{e_{1,k}}{k!},$$

получаем, что (16) эквивалентно соотношениям

$$e_{k+1}^{[n-k]}(s) \sim (-1)^{n-k+1} \cdot \frac{k!}{e_{1,k}} \cdot C_{\alpha,n} \cdot s^{\alpha-k} \cdot L(1/s), \quad s \downarrow 0,$$

откуда при $k = n$ выводим утверждение *леммы 5*. ▷

Доказательство леммы 6. По теор.1, гл.8, с.322 [2] заключаем, что при $n < \alpha < n+1$, $n \geq 1$ соотношения

$$1 - E_{k+1}(\mathrm{t}) \sim b_{k+1} \cdot t^{-(\alpha-k)} \cdot L(t), \quad t \to +\infty, \quad k = \overline{0,n}$$

эквивалентны при наличии равенств $b_{k+1} = (\alpha - k) \cdot e_{k,1} \cdot b_k$. Поэтому, замечая, что

$$b_{n+1} = b_1 \cdot \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k) \cdot e_{k,1} = b_1 \cdot \frac{e_{1,n}}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k),$$

и, полагая $b_1 = 1$, завершаем доказательство. ▷

Доказательство теоремы Ньюэлса. Пусть верно (15). По *лемме 6,* верно (19), что эквивалентно

$$1 - e_{n+1}(s) \sim \Gamma(n+1-\alpha) \cdot \frac{n!}{e_{1,n}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} (\alpha - k) \right)^{-1} \cdot s^{\alpha-n} \cdot L(1/s), \quad s \downarrow 0.$$

Для вывода (16) осталось использовать равенства

$$\Gamma(n+1-\alpha) = (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n) \cdot C_{\alpha,n}.$$

Те же аргументы и *леммы 5-6* позволяют получить (15) из (16). ▷

Примечания:

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 144 с.

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1984. 751 с.

3. Симонян А.Р., Симонян Р.А., Улитина Е.И., Ушаков В.Г. Стационарные времена ожидания в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета // Известия Сочинского государственного университета. 2013. №1-2(24). с. 26-42.

4.Simonyan A.R., Simonyan R.A., Ulitina E.I., About Nested Circus Markov In One Parametric Queuing Model // European researcher. 2013. № 5-1 (48). p. 1119-1130.

5. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Вокруг теоремы Боровкова-Коэна // Известия Сочинского государственного университета. 2013. №3(26). с. 140-144.

6. Danielyan E.A., Simonyan A.R., Ulitina E.I., Regular Variation Of The Tail Of Distribution Of The Sum Of The Random Number Of Independent Random Variables // European researcher. 2012. № 5-1 (40). p. 440-447.

7. Simonyan A.R., Ulitina E.I. A Theorem On The Convergence To A Stable Law In The M|G|1|∞ Model // Russian Mathematical Surveys. 2004. Т. 59. № 3. С. 589-590.

8. Симонян А.Р., Улитина Е.И. О дискретных характеристиках в модели G|G|1|∞// Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т.15. №4. С. 762-763.

9. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Нестационарные характеристики в модели Клейнрока с нелинейной функциец приоритета // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т. 17. № 2. С. 57.

10. Karamata J. Sur certains "Tauberian Theorems" de M.M.Hardy et Littlewood // Mathematica (Cluj), 1930, No3, p. 33-48.

11. Nevels K. Stable Attraction and Tauberian Theorems. // Croningen: Inst. Voor. Algement Psychologie Oude Boteringestroat, 1974, p. 34.

UDK 519.219

Two Tauberian Theorems for the Distribution Function Tails

[1] Arsen R. Simonyan
[2] Elena I. Ulitina
[3] Irina P. Lopatina

[1-3] Sochi State University, Russian Federation
Sovetskaya Street 26 a, Sochi city, Krasnodar krai, 354000
[1] PhD, Associate Professor
E-mail: oppm@mail.ru
[2] PhD, Associate Professor
E-mail: ulitinaelena@mail.ru
[3] Lecturer
E-mail: iralopatina@rambler.ru

Abstract. The paper proves two tauberian theorems for the distribution function tails of nonnegative discrete and continuous random variables with the assumption of proper variation of tails, using the direct method. The first one is attributed to the generating function, the second one – to the Laplace- Stieltjes distribution. The second theory was set by K.Newels, using the indirect method of addressing to the theorems of convergence to stable law.

Keywords: limiting theorems; theorem of probability; queuing theorem; slowly varying functions; tauberian theorems.