

Физико-математические науки

УДК 519.217

Вокруг теоремы Боровкова-Коэна *

¹Арсен Рафикович Симонян

²Елена Ивановна Улитина

¹Сочинский государственный университет, Россия
354000, г.Сочи, ул.Советская, 26а,
кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: orpm@mail.ru

²Сочинский государственный университет, Россия
354000, г.Сочи, ул.Советская, 26а,
кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: ulitinaelena@mail.ru

Аннотация. В статье дано новое простое доказательство известной теоремы о правильном изменении хвостов двух стационарных распределений времен ожидания в модели $GI|G|1|_{\infty}$ при дисциплине FIFO в случае правильного изменения хвоста распределения времени обслуживания. Теорема доказана ранее А.А. Боровковым и Дж. Коэном.

Получен аналог этого результата для стационарных распределений длин очередей и для момента первого достижения положительного уровня для лестничной высоты соответствующего модели $GI|G|1|_{\infty}$ случайного блуждания.

Ключевые слова: система массового обслуживания; длина очереди; правильно меняющиеся функция; хвосты распределения.

Введение.

¹⁰. **Модель $GI|G|1|_{\infty}$.** [1, 2]. В одноканальную систему обслуживания с ожиданием в моменты $t_1, t_2, \dots$, где $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ поступают одиночные вызовы. Перенумеруем поступающие вызовы в порядке поступления числами $1, 2, \dots$, обозначим через $v_n, n \geq 1$ время обслуживания n -го вызова и пусть $u_n = t_n - t_{n-1}, t_0 = 0$.

Далее, $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ образуют независимые последовательности независимых одинаково распределенных (НОР) случайных величин (СВ) с функциями распределения (ФР) $A(x)$ и $B(x)$ соответственно, причем $A(+0) = B(+0) = 0$,

$$0 < \alpha_1 = Mu_1 < +\infty \text{ и } 0 < \beta_1 = Mv_1 < +\infty,$$

где M – знак математического ожидания.

Вызовы обслуживаются в порядке поступления (дисциплина FIFO) в момент $t = 0$ прибор свободен от вызовов.

Пусть $w_n, n \geq 1$ – время ожидания начала обслуживания n -го вызова, а $w(t), t \geq 0$ – виртуальное время ожидания вызова в момент t .

Известно, что в случае $\rho_1 = (\beta_1 / \alpha_1) < 1$ существуют, вообще говоря, различные пределы [2, 3]

$$w_n \Rightarrow w \text{ при } n \rightarrow +\infty \text{ и } w(t) \Rightarrow w' \text{ при } t \rightarrow +\infty,$$

где $\Rightarrow$ – знак слабой сходимости. При этом, $W(x) = P(w < x)$ и $W'(x) = P(w' < x), x \in \mathbb{R}^1$, где P – знак вероятности, являются собственными ФР, т.е. $W(+\infty) = W'(+\infty) = 1$. Их называют стационарными ФР времен ожидания.

Более того $W(x) = W'(x), x \in \mathbb{R}^1$, тогда и только тогда, когда

$$A(x) = \begin{cases} 1 - \exp(\alpha_1^{-1}x), x \geq 0 \\ 0, x < 0, \end{cases}$$

т.е. в случае модели $M|G|1|_{\infty}$ [4].

Пусть СВ $u, v, \hat{u}, \hat{v}, w, w'$ независимы и имеют соответственно ФР $A(x), B(x), \hat{A}(x), \hat{B}(x), W(x), W'(x)$ соответственно, где

$$\hat{A}(x) = \alpha_1^{-1} \int_0^x (1 - A(t)) dt, \hat{B}(x) = \beta_1^{-1} \int_0^x (1 - B(t)) dt, x \in [0, +\infty).$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 12-01-00196-а.

Помимо известной формулы Линдли [1],

$$w = \max(0, w + v - u),$$

где равенство означает совпадение ФР обеих частей случайного равенства, существуют формулы связи между w и w' . Именно, при $x \in [0, +\infty)$

$$P(w' < x) = 1 - \rho_1 + \rho_1 P(w + \hat{v} < x) \text{ - (Формула Такача [5])},$$

$$P(w' < x) = P(\max(0, w + v - \hat{u}) < x) \text{ - (Формула Хука [6])}.$$

2°. **Теорема Боровкова-Коэна.** Измеримая на $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ функция $R(t) > 0$ называется правильно меняющейся при $t \rightarrow +\infty$ с показателем $\rho \in \mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$, если она представлена в виде

$$R(t) = t^\rho \cdot L(t), t \in \mathbb{R}^+, (1)$$

где для любого $x \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1. \text{ (см. [7]) } (2)$$

В дальнейшем символ L используется для обозначения измеримой функции $L(t) > 0$ типа (2), называемой медленно меняющейся.

Возникает задача выявления условий, при которых «хвосты» $1 - W(t)$ и $1 - W'(t)$ стационарных ФР времен ожидания правильно меняющиеся при $t \rightarrow +\infty$.

Задача с помощью факторизационных тождеств решена в [8, 9].

Теорема. При $\alpha > 1$ и $\rho_1 < 1$ соотношения

$$1 - B(t) \sim t^\alpha \cdot L(t), t \rightarrow +\infty, (3)$$

и

$$1 - W(t) \sim \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)(\alpha - 1)\beta_1} \cdot t^{-(\alpha-1)} L(t), t \rightarrow +\infty (4)$$

эквивалентны. Утверждение справедливо при замене $W(t)$ на $W'(t)$.

Здесь $f(t) \sim g(t), t \rightarrow a$ означает $\lim_{t \rightarrow a} (f(t)/g(t)) = 1$.

Мы приведем новое простое доказательство этой теоремы с помощью формул Линдли, Такача и Хука.

3°. **Следствия.** Пусть в модели $G|G|1|_\infty$ $\theta_n, n \geq 1$ и $\theta(t), t \geq 0$ - длины очередей в моменты $t_n + 0$ и t соответственно. При $\rho_1 < 1$ существуют, пределы [2, 3]

$$\theta_n \Rightarrow \theta \text{ при } n \rightarrow +\infty \text{ и } \theta(t) \Rightarrow \theta' \text{ при } t \rightarrow +\infty,$$

где $P(\theta < +\infty) = P(\theta' < +\infty) = 1$.

По теоремам 21 и 22 (см. [2] с. 207-208)

$$P(\theta \geq k) = P(w \geq t_k) \text{ и } P(\theta' \geq k + 1) = P(w' \geq t_k + \hat{u}), k \geq 1, (5)$$

где при каждом k величины $w, w', t_k, \hat{u}$ независимы.

С помощью (5) и формулы Литтля в терминах СВ [10]

$$P(w = \alpha_1 \cdot \theta') = 1, (6)$$

из теоремы вытекает

Следствие 1. При $\alpha > 1$ и $\rho_1 < 1$ соотношения (3) и

$$P(\theta' > n) \sim \frac{1}{(1 - \rho_1)(\alpha - 1)\alpha_1^\alpha} \cdot n^{-(\alpha-1)} \cdot L(n), n \rightarrow +\infty (7)$$

эквивалентны. Утверждение справедливо при замене $P(\theta' > n)$ на $P(\theta > n)$.

Пусть $\{\zeta_n\}$ - последовательность НОР СВ с ФР $K(x) = B(x) * (1 - A(-x))$, $x \in \mathbb{R}^1$, где $*$ - знак свертки.

Дополнительно предположим, что $A(x)$ - неарифметическая ФР и обозначим

$$S_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n, n \geq 1, S_0 = 0.$$

В случайном блуждании $\{S_n\}$ рассмотрим лестничные величины (см. [11, 12])

$$N_0 = 0 \text{ и } N_k = \min\{n > 0: S_n > S_{N_{k-1}}\},$$

$$\eta_0 = 0 \text{ и } \eta_k = S_{N_k} - S_{N_{k-1}}, k \geq 1.$$

При $\rho_1 < 1$ (см. [13])

$$0 < p \triangleq \sum_{n \geq 1} P(S_k \leq 0, k = \overline{1, n-1}, S_n > 0) = \sum_{n \geq 1} P(N_1 = n) < 1, (9)$$

и поэтому $\{N_1 + \dots + N_n\}$ и $\{\eta_1 + \dots + \eta_n\}$ образуют обрывающиеся процессы восстановления с дефектом $1 - p$.

Пусть $G(x) = P(\eta_n < x), n \geq 1, x \geq 0$, где $G(+\infty) = p$.

Следствие 2. При $\alpha > 1$ и $\rho_1 < 1$ соотношения (3) и

$$G(+\infty) - G(t) \sim (1 - p) \cdot \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)(\alpha - 1)\beta_1} \cdot t^{-(\alpha-1)} L(t), t \rightarrow +\infty \quad (10)$$

эквивалентны.

Доказательства содержатся в приложении.

1. Приложение

Доказательство теоремы опирается на три леммы.

Лемма 1. Пусть ξ_1 и ξ_2 независимые СВ и $\zeta = \xi_1 + \xi_2$. Тогда

$$1. \quad P(\zeta \geq t) \geq P(\xi_1 \geq t) + P(\xi_2 \geq t), t \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

Здесь $f(t) \geq g(t), t \rightarrow +\infty$ означает $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)/g(t)) \geq 1$.

2. Для $\delta \in (0, 1/2)$ и $t > 0$ справедливо неравенство

$$P(\zeta \geq t) \leq P(\xi_1 \geq (1 - \delta)t) + P(\xi_2 \geq (1 - \delta)t) + P(\xi_1 \geq \delta t) \cdot P(\xi_2 \geq \delta t). \quad (12)$$

Лемма 1 представляет переформулировку утверждения на с.319 (см. [11]).

Лемма 2. При $\rho_1 < 1$

$$P(w \geq t) \sim P(w' \geq t), t \rightarrow +\infty \text{ и } P(\theta \geq k) \sim P(\theta' \geq k + 1), k \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Доказательство. При $x > 0$ перепишем формулы Линдли и Хука в виде

$$P(w \geq x) = P(w + v - u \geq x), P(w' \geq x) = P(w + v - \hat{u} \geq x), x \geq 0. \quad (14)$$

С другой стороны,

$$P(w + v \geq x) \geq P(w + v - u \geq x), x \geq 0,$$

а в силу (11), имеем

$$P(w + v - u \geq x) \geq P(w + v \geq x), x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует

$$P(w + v - u \geq x) \sim P(w + v \geq x), x \rightarrow +\infty \quad (15)$$

и, аналогично,

$$P(w + v - \hat{u} \geq x) \sim P(w + v \geq x), x \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Эквивалентности (15)-(16), будучи подставлены в формулы (14), приводят к первому соотношению (13). Лемма 2 доказана.

Поскольку $P(\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty) = 1$, то как и при выводе (15),

$$P(w' \geq t_k) \sim P(w' \geq t_k + \hat{u}), k \rightarrow +\infty \quad (17)$$

и во втором равенстве (5) СВ $\hat{u}$ можно опустить.

Теперь, из (5) (без СВ $\hat{u}$) и ранее доказанной эквивалентности следует второе соотношение (13).

Лемма 3. Правильное изменение $P(w \geq t)$ или $P(v' \geq t)$ при $t \rightarrow +\infty$ влечет асимптотическое соотношение

$$P(w \geq t) \sim \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1)} \cdot P(v' \geq t), t \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Согласно первой эквивалентности (13) и формуле Такача, справедливо асимптотическое равенство

$$P(w \geq t) \sim \rho_1 \cdot P(w + \hat{v} \geq t), t \rightarrow +\infty, \quad (18)$$

где неотрицательные СВ w и $\hat{v}$ независимы. Для независимых СВ w и $\hat{v}$ следующее асимптотическое неравенство всегда имеет место (см.(11))

$$P(w + \hat{v} \geq t) \geq P(w \geq t) + P(\hat{v} \geq t), t \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из (18) выводим

$$P(w \geq t) \geq \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \cdot P(\hat{v} \geq t), t \rightarrow +\infty. \quad (19)$$

Полагая $z = (1 - \delta)t, 0 < \delta < 1/2$, при $t > 0$ перепишем с учетом (18) неравенство (12)

$$P(w \geq t) \leq \rho_1 \cdot P(w \geq z) + \rho_1 \cdot P(\hat{v} \geq z) + \rho_1 \cdot P(w \geq \delta \cdot t) \cdot P(\hat{v} \geq \delta \cdot t), t \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

Если $P(w \geq t)$ правильно меняется при $t \rightarrow +\infty$, то

$$P(w \geq t) = \frac{L_1(t)}{t^{\alpha-1}}, \alpha > 1, t > 0,$$

где L_1 — некоторая медленно меняющаяся функция. Тогда

$$P(w \geq t) - \rho_1 \cdot P(w \geq z) = \frac{L_1(t)}{t^{\alpha-1}} \cdot \left\{ 1 - \frac{L_1((1 - \delta)t)}{L_1(t)} \cdot \frac{\rho_1}{(1 - \delta)^{\alpha-1}} \right\}.$$

Поскольку $\lim_{t \rightarrow +\infty} L_1((1 - \delta)t)/L_1(t) = 1$, то

$$P(w \geq t) - \rho_1 \cdot P(w \geq z) \sim \frac{L_1(t)}{t^{\alpha-1}} \cdot \left\{ 1 - \frac{\rho_1}{(1 - \delta)^{\alpha-1}} \right\}, t \rightarrow +\infty,$$

а δ можно выбрать настолько малым, что

$$1 - \frac{\rho_1}{(1 - \delta)^{\alpha-1}} > 0.$$

В то же время, в силу (19),
 $\rho_1 \cdot P(w \geq \delta \cdot t) \cdot P(\hat{v} \geq \delta \cdot t) \leq (1 - \rho_1) \cdot P(w \geq t) \cdot P(w \geq \delta \cdot t) =$
 $= o(P(w \geq z)), t \rightarrow +\infty.$

Следовательно, устремляя $\delta \downarrow 0$, из (20) выводим

$$P(w \geq t) \leq \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \cdot P(\hat{v} \geq t),$$

что вместе с (19) доказывает лемму в данном случае.

Теперь, выведем последнее неравенство в случае правильного изменения $P(\hat{v} \geq t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Пусть

$$P(\hat{v} \geq t) = \frac{L_2(t)}{t^{\alpha-1}}, \alpha > 1, t > 0,$$

где L_2 — некоторая медленно меняющаяся функция.

Так как при $\rho_1 < 1$ w является собственной СВ, то $P(w \geq \delta \cdot t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и

$$P(w \geq \delta \cdot t) \cdot P(\hat{v} \geq \delta \cdot t) = \frac{L_2(\delta \cdot t)}{(\delta \cdot t)^{\alpha-1}} \cdot P(w \geq \delta \cdot t) =$$

$$= o(P(\hat{v} \geq z)) = o\left(\frac{L_2(\delta \cdot t)}{((1 - \delta)t)^{\alpha-1}}\right), t \rightarrow +\infty.$$

Здесь принято во внимание, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} L_2((1 - \delta)t)/L_2(\delta \cdot t) = 1$.

Следовательно, из (20) имеем

$$P(w \geq t) \leq \rho_1 \cdot P(w \geq z) + \rho_1 \cdot P(\hat{v} \geq z) < t \rightarrow +\infty.$$

Устремляя в последнем соотношении $\delta \downarrow 0$, получаем противоположное (19) асимптотическое неравенство.

Лемма 3 доказано.

Докажем теорему (Боровкова-Козна).

Лемма 3 может быть переформулирована: При $\rho_1 < 1$ и любом $\alpha > 1$ соотношения

$$1 - \hat{B}(t) \sim t^{-(\alpha-1)} \cdot L(t), t \rightarrow +\infty$$

и

$$P(w \geq t) \sim \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \cdot t^{-(\alpha-1)} \cdot L(t), t \rightarrow +\infty$$

эквивалентны. Здесь L — некоторая медленно меняющаяся функция.

Отсюда, уже из конкретного вида $\hat{B}(t)$ и теоремы 1, гл.8, с.322 [11] выводим теорему для W .

Доказательство для W' завершает лемма 2.

Сделаем одно замечание. При $A(t) = 1 - \exp(-at)$, $t \geq 0, a > 0$ (тогда $\alpha = \alpha_1^{-1}$) приходим к модели $M|G|1| \infty$. В этом случае при $\rho_1 < 1$ известна следующая формула (см.[14], гл.1)

$$W'(x) = W(x) = (1 - \rho_1) \cdot \sum_{n \geq 0} \rho_1^n \cdot \hat{B}^{n*}(x), x \geq 0.$$

Здесь $\hat{B}^{n*}$ — n -кратная свертка $\hat{B}$ с собой, $\hat{B}^{0*} \equiv 1$. Тогда, очевидно,

$$w' = w = \hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \dots + \hat{v}_\tau \text{ при } \rho_1 < 1,$$

где $\{\hat{v}_n\}$ — последовательность НОР СВ с ФР $\hat{B}$, τ — целочисленный индекс с геометрическим распределением $\{(1 - \rho_1) \cdot \rho_1^n\}$, не зависящий от $\{\hat{v}_n\}$.

Лемма 3 в этом конкретном случае следует из результатов работы [15].

Доказательство следствия 1. Из (6) и теоремы для $W(t)$ имеем: соотношения (3) и

$$P(\theta' > n) \sim \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \cdot \frac{1}{(\alpha - 1) \cdot \beta_1} \cdot (n\alpha_1)^{-(\alpha-1)} \cdot L(n\alpha_1), n \rightarrow +\infty \quad (21)$$

эквивалентны. Так как

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L(n\alpha_1)}{L(n)} = 1, \rho_1 = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right),$$

то из (21) следует следствие 1 для $P(\theta' > n)$.

Второе соотношение (13), (21) и равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n + 1)/1)^{-(\alpha-1)} \cdot (L(n + 1)/L(n)) = 1$$

Доказывают следствие 1 для $P(\theta > n)$.

Доказательство следствия 2. При $\rho_1 < 1$, по формуле (5.3), гл.12, с.462 [11],

$$P(w < x) = (1 - p) \cdot \sum_{n \geq 0} G^{n*}(x), x \geq 0. \quad (22)$$

Введем последовательность НОР СВ $\{\hat{\eta}_n\}$ с ФР $G_1(x) = p^{-1} \cdot G(x)$. Тогда в силу (22), при $\rho_1 < 1$

$$P(w < x) = (1 - p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p^n \cdot G^{n*}(x), x \geq 0,$$

Или

$$w = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 + \dots + \hat{\eta}_\mu$$

где целочисленный индекс $\mu \geq 0$ не зависит от $\{\hat{\eta}_n\}$ и имеет геометрическое распределение $\{(1-p)p^n\}$.

Как и при доказательстве теоремы Боровкова-Коэна в случае модели $M|G|1|\infty$ заключаем:

Пусть $\alpha > 1$ и $\rho_1 < 1$. Тогда соотношения

$$1 - G_1(t) \sim t^{-(\alpha-1)} L(t), t \rightarrow +\infty$$

и

$$P(w \geq t) \sim \frac{p}{1-p} \cdot t^{-(\alpha-1)} \cdot L(t), t \rightarrow +\infty$$

эквивалентны.

Из этого утверждения, теоремы Боровкова-Коэна для $P(w \geq t)$ и равенства

$$G_1 = p^{-1}G$$

Вытекает следствие 2.

Примечания:

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
2. Даниелян Э.А., Симонян А.Р. Введение в теорию очередей. Ереван: РАУ, 2005. 198 с.
3. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1971. 368 с.
4. Улитина Е.И. Асимптотический анализ времен ожидания в модели $M|G|1|\infty$ // Обзорные прикладной и промышленной математики, 2004. Т. 11. Вып. 1. С. 83-85.
5. Harrison J.M., Lemoine A.J. On the Virtual and Actual Waiting Time Distributions of a $GI|G|1$ Queue // J. of Applied Probability, 1976, Vol. 13. P. 833-836.
6. Lemoine A.J. On two stationary distributions for the stable $GI|G|1$ queue // J. of Applied Probability, 1974, Vol. 11. P. 849-852.
7. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 142 с.
8. Боровков А.А. О факторизационных тождествах и свойствах распределений супремума последовательных сумм // Теория вероятностей и ее применения. 1970. 15:3. С. 377-418.
9. Cohen J.W. Asymptotic relations in queueing theory // Stochastic Processes and their Applications, 1973, Vol. 1, issue 2. P. 107-124.
10. Stidham S. A Last Word on $L = \lambda W$ // Operations Research, 1974, Vol. 22, No 2. P.417-421.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
12. Danielyan E.A., Simonyan A.R., Ulitina E.I. Regular Variation of the Tail of Distribution of the Sum of the Random Number of Independent Random Variables // European Researcher, 2012, No 5-1. P. 440-447.
13. Прабху Н.У. Стохастические процессы теории запасов. М.: Мир, 1984. 185 с.
14. Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А. и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973. 447 с.
15. Stam A.J. Regular Variation of the Tail of a Subordinated Probability Distribution // Adv. Appl. Prob., 1973, 5. P. 308-327.

UDC 519.217

Borovkov-Cohen Theory

¹ Arsen R. Simonian

² Elena I. Ulitina

¹⁻² Sochi State University, Russia

26a Sovetskaya St., Sochi 354000, Krasnodar Region

¹PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor

E-mail: oppm@mail.ru

² PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor

E-mail: ulitinaelena@mail.ru

Abstract. The article presents new simple proof of the well-known theory on correct alternation of tails of two stationary delay-in-queue distribution in the model $GI|G|1|\infty$ at FIFO subject in case of correct alternation of service-time distribution tail. The theory was proved by A.A. Borovkov and J. Cohen.

The analog of this result was got for queue length stationary distribution and for the moment of the first achievement of positive level of ladder height of the relevant model $GI|G|1|\infty$ of random walk.

Keywords: queueing system; queue length; correctly alternating function, distribution tails.