УДК 519.217

Стационарные времена ожидания в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета *

[1] Арсен Рафикович Симонян
[2] Рафик Арсенович Симонян
[3] Елена Ивановна Улитина
[4] Владимир Георгиевич Ушаков

[1] Сочинский государственный университет, Россия
354000, Краснодарский край, г.Сочи, ул.Советская, 26а
кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: oppm@mail.ru
[2] Кубанский государственный университет, Россия
350040, Краснодар, ул.Ставропольская, 149
[3] Сочинский государственный университет, Россия
354000, Краснодарский край, г.Сочи, ул.Советская, 26а
кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: ulitinaelena@mail.ru
[4] Московский государственный университет, Россия
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1-52
доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: ushakov@comtv.ru

Аннотация. В статье получены новые точные результаты для стационарных виртуальных времен ожидания в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета. Далее эти результаты обобщены на вектор-процессы, связанные с основными характеристиками систем массового обслуживания. Доказаны также условия, при которых существуют стационарные характеристики модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета. Все результаты для основных характеристик модели получены на языке преобразования Лапласа, что упрощает дальнейшие выводы асимптотических результатов для этих и связанных с ними характеристик модели.

Ключевые слова: теория массового обслуживания; времена ожидания; загрузка; функция распределения; модель Клейнрока.

Введение. Бурное развитие новых инновационных технологий во всех областях жизни, науки и техники диктует необходимость разработки и изучения их математических моделей. В прикладных задачах перспективным считается анализ параметрических дисциплин систем массового обслуживания. В работе рассмотрена параметрическая модель Клейнрока с нелинейной функцией приоритета [1, 2]. Данная модель построена так, что ее «крайними» случаями являются дисциплина относительных приоритетов с дисциплиной FIFO внутри потоков и неприоритетная дисциплина FIFO. Непрерывное изменение параметров позволяет регулировать меру предоставляемого преимущества различным потокам. Главной характеристикой моделей массового обслуживания является виртуальное время ожидания $w_k(t), \quad k=1,2,..,r, \quad t \geq 0$, k - вызова в момент t.

Виртуальные времена ожидания и вектора от виртуальных времен ожидания в модели Клейнрока являются регенерирующими процессами с непрерывным временем и с несчетным множеством состояний [3]. При загрузке модели, меньшей 1, существуют стационарные характеристики времен ожидания и векторов от времен ожиданий. В работе методом предельного перехода при $t \to +\infty$ в уравнениях для рассматриваемых характеристик получены новые теоремы для стационарных функций распределения виртуальных времен ожидания и их векторов. Системы рекуррентных уравнений получены разными методами и непосредственно несводимы друг к другу.

* Работа поддержана грантами РФФИ №09-01-90700 – моб_ст и № 12-01-00196-а

Обсуждение проблемы. Модель Клейнрока[1, 2, 4]. В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с интенсивностями $a_1 > 0,\dots,a_r > 0$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов не зависят от процесса поступления, независимы в совокупности и имеют функцию распределения $B_k(x), B_k(+0)=0$. В момент $t=0$ в системе нет вызовов.

Поступивший в момент $\tau > 0$ в систему k-вызов, $k=1,2,\dots,r$, в момент $t>\tau$ приобретает приоритет $q_k(t)=b_k(t-\tau)^\gamma$, где $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r > 0$ параметры модели, $\gamma > 0$. При очередном завершении обслуживания из очереди выбирается вызов с наибольшим приоритетом.

Дисциплина Клейнрока является $(r-1)$ - параметрической дисциплиной, зависящей от отношений $\left(b_{k+1}/b_k\right)$, $k=1,2,\dots,r-1$. Случаи $b_1=b_2=\dots=b_r$ и $\left(b_к/b_{к+1}\right)\to\infty$, $k=1,2,\dots,r-1$, соответствуют дисциплинам FIFO (прямой порядок обслуживания) и относительных приоритетов с дисциплиной FIFO внутри потоков.

Пусть $v_k(t)$, $k=1,2,\dots,r$, $t>0$, есть $w_k(t)$ без времен обслуживания тех $\overline{1,k-1}$ - вызовов, которые поступили в модель после момента t и обслужены до момента $t+w_k(t)$.

Рассмотрим функцию приоритета $q_k(t)=b_k(t-\tau)^\gamma$, где $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r > 0$ - параметры модели, $\tau > 0$ - момент поступления в модель k-вызова, $k=1,2,\dots,r$, $\gamma>0$. Функция $q_k(t)$ возрастает при $t>0$, и ее можно представить в виде $q_k(t)=(b_k^{1/\gamma}(t-\tau))^\gamma=\left(q_k^0(t)\right)^\gamma$. Функция $q_k^0(t)=b_k^{1/\gamma}(t-\tau)$ также является возрастающей при $t>0$, следовательно, между $q_k(t)$ и $q_k^0(t)$ можно установить взаимнооднозначное соответствие, причем наибольшему значению приоритета $q_k(t)$ соответствует наибольшее значение $q_k^0(t)$. Исходя из этого, можем считать рассматриваемую модель Клейнрока моделью с функцией приоритета $q_k^0(t)=b_k^{1/\gamma}(t-\tau)$.

Пусть $\pi_k(s)$, $k=1,2,\dots,r$, $s \geq 0$ - минимальный по абсолютному значению корень среди корней $k=1,2,\dots,r$ функционального уравнения

$$\sigma_k \cdot x=\sum_{i=1}^{k} a_{ik}\cdot\beta_i(s+\sigma_k-\sigma_k\cdot x), \qquad (1)$$

где $a_{ik}=a_i\cdot\left(1-\left(b_{k+1}/b_i\right)^{1/\gamma}\right)$, $i=1,2,\dots,k$, $\sigma_k=a_{1k}+a_{2k}+\dots+a_{kk}$, $b_{r+1}=0$,

$$\beta_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dB_k(x),\ s\geq 0.$$

Инвариант в классе консервативных дисциплин модели $M_r|G_r|1|\infty$ функция $P(t)dt$ (вероятность свободного состояния прибора в промежутке $[t,t+dt)$) определяется уравнением [5]

$$\int_0^\infty e^{-st}P(t)dt=(m_r(s))^{-1}, s\geq 0.$$

Пусть $\rho_1=\sum_{i=1}^{r} a_i\beta_{i1}$ - загрузка модели, $\beta_{ki}=\int_0^\infty x^i dB_k(x)$, $k=1,2,\dots,r$, $i\geq 1$.

1^0. К нестационарным характеристикам с непрерывным временем относят длину очереди $\xi_k(t)$, $k=1,2,,...,r$, $t \ge 0$, виртуальное время ожидания $w_k(t)$ k-вызова в момент t и т.д. Отметим их дискретные налоги (характеристики с дискретным временем) в моменты начал, завершений обслуживания, поступлений вызовов.

Пусть $t_1 < t_2 < \ldots$ - последовательные моменты ухода вызовов из модели. Аналогом $\xi_k(t)$, $k=1,2,...,r$, $t \ge 0$, может служить последовательность $\xi_{k,n} = \xi_k(t_n)$, $n \ge 1$.

Пусть $\eta(t) \Rightarrow \eta$, $t \to +\infty$, где $\eta(t)$, $t \ge 0$, - нестационарная характеристика, $P(\eta < +\infty) = 1$, $\Rightarrow$ – знак слабой сходимости. Тогда η – стационарная характеристика, соответствующая $\eta(t)$.

Многие нестационарные характеристики в классе консервативных дисциплин модели $M_r|G_r|1|\infty$ являются регенерирующими процессами с непрерывным или дискретным временем. Именно существует случайный момент $s_1 > 0$ такой, что течение процесса после s_1 является точной вероятностной копией всего процесса, начинающегося в момент $s_0 = 0$. Тогда существует целая последовательность $\{s_n\}$ следующих друг за другом таких моментов, для которых случайные величины $s_n - s_{n-1}$, $n \ge 1$, независимы и одинаково распределены. Величина s_1 для процессов с непрерывным временем есть промежуток свободного состояния прибора плюс следующий за ним период занятости π, а для процессов с дискретным временем – случайное число ν обслуженных за π вызовов. Тогда соответственно

$$Es_1 = \sigma^{-1} + E\pi \text{ и } Es_1 = E\nu,$$

где $\sigma = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$. В классе консервативных дисциплин модели $M_r|G_r|1|\infty$ величины π и ν инвариантны и

$$\sigma \cdot E\pi = \begin{cases} \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1} & \text{при } \rho_1 < 1, \\ +\infty & \text{при } \rho_1 \ge 1, \end{cases} \quad E\nu = \begin{cases} \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1} & \text{при } \rho_1 < 1, \\ +\infty & \text{при } \rho_1 \ge 1. \end{cases} \tag{2}$$

Согласно теореме из [6], стр. 446, стационарное распределение у регенерирующего процесса со счетным множеством состояний существует, если $Es_1 < +\infty$ с дополнительным в случае процесса с непрерывным временем требованием непериодичности по n последовательности $\{P(s_1 = n)\}$.

Согласно (2), условия $\rho_1 < 1$ и $Es_1 < +\infty$ эквивалентны. Тогда из непериодичности $\{P(\nu = n)\}$ для вектор-последовательности

$$\{(\zeta_n, \xi_{1,n}, ..., \xi_{r,n}) : n \ge 1\}, \tag{3}$$

где $\zeta_n = \zeta(t_n)$, $\xi_{k,n} = \xi_k(t_n)$, $k=1,2,...,r$, $n \ge 1$, $\zeta(t) = k$, если в момент t обслуживается k-вызов, $\zeta(t) = 0$, если в момент t прибор свободен, и для вектор-процесса

$$\{(\zeta(t), \xi_1(t), ..., \xi_r(t)) : t \ge 0\} \tag{4}$$

справедливо следующее утверждение [1].

Теорема [7]. В классе консервативных дисциплин модели $M_r|G_r|1|\infty$ условие $\rho_1 < 1$ достаточно для существования стационарных распределения вектор-процессов (3) и (4).

Для характеристик с несчетным множеством состояний ситуация существенно сложнее.

Гипотеза [2]. В классе консервативных дисциплин модели $M_r|G_r|1|\infty$ условие $\rho_1 < 1$ достаточно для существования стационарных распределений у нестационарных характеристик, являющихся регенерирующими процессами.

Гипотеза подтверждена для многих характеристик и дисциплин. Математик рассматривает гипотезу применительно к отдельным характеристикам. Гипотеза же выдвигает универсальное условие в широком классе дисциплин для многих характеристик.

В случае конкретной дисциплины изучаемую характеристику с несчетным множеством состояний математик:

а) либо выражает через характеристики со счетным множеством состояний;

б) либо осуществляет предельный переход $t \to +\infty$ в уравнениях для характеристик с целью нахождения стационарных распределений.

В работе используется подход б).

2[0]. Процессы $\{w_k(t):\ t \ge 0\},\ k = 1,2,\dots,r$, в модели Клейнрока являются регенерирующими процессами с непрерывным временем и с несчетным множеством состояний.

Согласно гипотезе, для нестационарной характеристики $w_k(t),\ k = 1,2,\dots,r,\ t \ge 0$, при $t \to +\infty$ и $\rho_1 < 1$ должно существовать стационарное распределение, т.е.

$$w_k(t) \Rightarrow w_k,\quad t \to +\infty,\quad k = 1,2,\dots,r,$$

где w_k – стационарное время ожидания k-вызова. В связи с этим возникает

Задача 1. Доказать при $\rho_1 < 1$ существование и найти стационарное время ожидания k-вызова $k = 1,2,\dots,r$ в модели Клейнрока.

При каждом $k = 0,1,\dots,r-1$ обозначим через $\eta_{jk}(t),\ j = k+1, k+2,\dots,r, t \ge 0$, суммарное время обслуживания j-вызовов, находящихся в очереди в момент t, которые обслужены после момента $t + w_k(t)$.

Задача 2. Аналогично формулируется обобщение Задачи 1 для вектор-процессов $\{(w_k(t); \eta_{k+1k}(t),\dots,\eta_{rk}(t) : t \ge 0)\},\ k = 1,2,\dots,r$, являющихся регенерирующими процессами с непрерывным временем и с несчетным множеством состояний.

Для решения этих задач в п.п. 2, 3. используется подход б) на основе Теорем для виртуальных времен ожидания и векторов от виртуальных времен ожидания. В результате получены теоремы для соответствующих стационарных характеристик.

Конечность моментов целых положительных порядков до, скажем, $(m+1)$-го включительно у функций распределения $B_i(x),\ i = 1,2,\dots,r,\ x \ge 0$, обеспечивает конечность моментов до m-того порядка включительно у стационарных времен ожидания. Поэтому из для виртуальных времен ожидания могут быть вычислены

$$\omega_{kj} = \int_0^\infty x^j dP(w_j < x) = (-1)^j \cdot \left.\frac{d^j \omega_j(s)}{ds^j}\right|_{s=0},\quad j = 1,2,\dots,m.$$

В п 2. найдены две системы рекуррентных уравнений, определяющих $\omega_{k1},\ k = 1,2,\dots,r$.

Результаты. Пусть $\rho_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \beta_{i1}$, $\beta_{ki} = \int_0^\infty x^i dB_k(x), k = 1,2,\dots,r,\ i \ge 1.$

Неравенство $\rho_1 < 1$ служит условием существования стационарных ФР выше введенных величин. Обозначим v_k и w_k, $k = 1,2,\dots,r$, стационарные условное и безусловное времена ожидания k-вызова.

Для виртуальных времен ожидания в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета имеют место следующие теоремы.

Пусть $m_k(s) = s + \sigma_k - \sigma_k \pi_k(s),\ m_0(s) \equiv s,\ \sigma_k = \sum_{i=1}^{k} a_{ik},\ k = 1,2,\dots,r,\quad s \ge 0,$

функция $\pi_k(s)$ определяется уравнением (1).

При $k = 1,2,...,r$, $j = k, k+1,...,r$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ обозначим

$$p_k^j(s) = s - \sum_{i=1}^{k} a_{ij}(1-\beta_i(s)),\ v_k(s,t) = Ee^{-sv_k(t)},\ \omega_k(s,t) = Ee^{-sw_k(t)},$$

$$p_k(s) = s - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot (1-\beta_i(s)),\ b_{k,j} = \frac{(b_k)^{1/\gamma}}{(b_k)^{1/\gamma} - (b_j)^{1/\gamma}}.$$

Теорема 1. При любых $k = 1,2,...,r$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ справедливы равенства

$$\omega_k(s,t) = v_k(m_{k-1}(s),t), \tag{5}$$

$$v_k(s,t) = e^{p_k(s)t} \cdot \{1 - s \cdot \int_0^t e^{-p_k(s)u} \cdot P(u)du -$$

$$- \sum_{j=k+1}^{r} a_j(1-\beta_j(s)) \cdot \int_0^t e^{-p_k(s)v} dv \cdot \int_0^{b_{k,j}(t-v)} e^{-p_k^{j-1}(s)u} d_u P(w_j(v) < u)\}.$$

Теорема 2. При любых $k = 1,2,...,r$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ справедливо равенство

$$v_k(s,t) = \omega(s,t) + \sum_{j=k+1}^{r} a_j(1-\beta_j(s) \cdot \sum_{n=k+1}^{j} \int_0^t e^{p_{n-1}(s)y} dy \cdot$$
$$\cdot \int_{b_{n-1,j}y}^{b_{n,j}y} e^{-p_{n-1}^{j-1}(s)u} d_u P(w_j(t-y)) < u). \tag{6}$$

Из теорем 1 и 2 соответственно выводятся теоремы 3 и 4.

Теорема 3. Пусть $\rho_1 < 1$. При $k = 1,2,...,r$ и $s \geq 0$ существуют пределы

$$\omega_k(s) = \lim_{t \to +\infty} \omega_k(s,t), \tag{7}$$

причем

$$\omega_k(s) = \frac{1}{p_k(m_{k-1}(s))}\{(1-\rho_1)m_{k-1}(s) + \sum_{j=k+1}^{r} a_j(1-\beta_j(m_{k-1}(s)))\omega_j\left(\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma} s\right)\}. \tag{8}$$

Теорема 4. Пусть $\rho_1 < 1$. При $k = 1,2,...,r$ и $s \geq 0$

$$v_k(s) = \lim_{t \to +\infty} v_k(s,t), \tag{9}$$

причем при $j = 1,2,...,r-1$

$$v_j(s) = v_{j+1}(s) + a_{j+1}(1-\beta_{j+1}(s)) \cdot \frac{\omega_{j+1}\left(\left(b_{j+1}/b_j\right)^{1/\gamma} q_{j-1}(s)\right)}{p_j(s)}, \tag{10}$$

$\omega_j(s) = v_j(m_{j-1}(s))$.

Легко установить из (8) и (10), что при $\rho_1 < 1$ справедливы равенства $v_k(0) = \omega_k(0) = 1$, $k = 1,2,..,r$. Это означает, что $v_k(s)$ и $\omega_k(s)$, $k = 1,2,...,r$, $s \geq 0$, в силу (7) и (9), являются преобразованиями Лапласа-Стильтьеса функций распределения соответственно стационарных условного v_k и безусловного w_k времен ожидания k-вызова:

$v_k(s) = Ee^{-sv_k}$, $\omega_k(s) = Ee^{-sw_k}$.

Обозначим

$$\rho_{k2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}a_{ik}\beta_{i2},\ \rho_{k1}=\sum_{i=1}^{k}a_{ik}\beta_{i1},\ \rho_{k1}^{0}=\sum_{i=1}^{k}a_{i}\beta_{i1},\ k=1,2,\dots,r.$$

Из теоремы 3 выводится следующая система рекуррентных уравнений, определяющих средние стационарные времена ожидания

$$\omega_{k1}=\int_{0}^{\infty}xdP(w_k<x)=Ew_k\ ,\ k=1,2,\dots,r.$$

$$\omega_{k1}=\frac{\rho_{\kappa 2}}{(1-\rho_{k1}^{0})(1-\rho_{k-11})}+\frac{1}{1-\rho_{k1}^{0}}\sum_{j=k+1}^{r}a_j\beta_{j1}\cdot\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}\omega_{j1}. \quad (11)$$

Из теоремы 4 выводится следующая система уравнений: при $k=1,2,\dots,r-1$

$$\omega_{k1}=\left(\frac{1-\rho_{\kappa 1}}{1-\rho_{k-11}}-\frac{a_{k+1}\beta_{k+11}}{1-\rho_{k1}^{0}}\cdot\left(b_{k+1}/b_k\right)^{1/\gamma}\right)\omega_{k+11}-\frac{a_{k+1}\beta_{k+12}}{2(1-\rho_{k1}^{0})(1-\rho_{k-11})},\quad (12)$$

где ω_{r1} определяется из (11) при $k=r$: $\omega_{r1}=\dfrac{\rho_{r2}}{(1-\rho_{r1}^{0})(1-\rho_{r-11})}$.

Ранее была известна система уравнений Клейнрока [3]

$$\omega_{k1}=\frac{\rho_{\kappa 2}}{(1-\rho_{\kappa 1})(1-\rho_{k-11})}-\frac{1}{1-\rho_{k-11}}\cdot\sum_{j=k+1}^{r}a_j(1-\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma})\beta_{j1}\cdot\omega_{j1},k=\overline{1,r}.$$

Системы получены разными методами и непосредственно несводимы друг к другу.

При $\rho_1<1$ индукцией докажем существование пределов

$$\omega_j(s)=\lim_{t\to+\infty}\omega_j(s,t),\ \ j=1,2,\dots,r,\ s\geq 0, \quad (13)$$

что равносильно слабой сходимости

$$\lim_{t\to+\infty}P\left(w_j(t)<x\right)=P\left(w_j<x\right).$$

Основание индукции (k=r в Теоремах 3 и 4 .) ранее установлено в [8-10].

Индукционное предположение: пределы (13) существуют при $j=k+1,k+2,\dots,r$.

Теоремы 3 и 4 опираются на формулируемые ниже Леммы 1.-3. и используют следующую известную формулу дифференцирования [8–10].

Пусть $g(v,t)$ вещественная функция, существует производная $g_t'(v,t)$ и сходится интеграл $F(t)=\int_0^t g(v,t)dv$.

Тогда существует производная $F'(t)=g(t,t)+\int_0^t g_t'(v,t)dv.$

В частности, если

$$F(t)=\int_0^t\left(\int_{t-v}^{\infty}f(v,y)dy\right)dv, \quad (14)$$

то

$$F'(t)=\int_0^{\infty}f(t,y)dy-\int_0^t f(v,t-v)dv.$$

Если же

$$F(t)=\int_0^t\left(\int_{t-v}^{\infty} f(v,y)dy\right)dv+\int_0^{\infty}\left(\int_t^{\infty} f(v,y)dv\right)dy, \qquad (15)$$

то

$$F'(t)=-\int_0^t f(v,t-v)dv.$$

Всюду ниже предполагаем $\rho_1<1$***. При*** $t\geq 0$ ***обозначим***

$$D_t=\{(u,v):u\geq 0,v\geq 0,u+v>t\}=\{(u,v):u\geq 0,v>t\}\cup\{(u,v):u\leq v\leq t,u>t-v\}, \qquad (16)$$

где подобласти области D_t в правой части (16) не пересекаются.

Лемма 1. При $k=1,2,\ldots,r,\ t\geq 0,\ s\geq 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_k(s,t)=e^{p_k(s)t}\Bigg\{&s\cdot\int_t^{\infty}e^{-p_k(s)u}\cdot P(u)du+\\ &+\sum_{j=k+1}^{r}a_j\cdot(1-\beta_j(s))\iint_{D_r}e^{-p_k(s)v-b_{k,j}p_k^{j-1}(s)u}d_uP\left(\left(1-(b_j/b_k)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)dv\Bigg\} \end{aligned}.(17)$$

Напомним, что

$$p_k^j(s)=s-\sum_{i=1}^{k}a_{ij}(1-\beta_i(s)),\ k=1,2,\ldots,r,\ j=k,k+1,\ldots,r,\ s\geq 0.$$

Доказательство. В правой части формулы (17) производим замену переменной во внутренних интегралах суммы $u=u'\cdot b_{k,j}$ и переобозначаем u' через u.

$$\begin{aligned} v_k(s,t)=e^{p_k(s)t}\cdot\Bigg\{&1-s\cdot\int_0^t e^{-p_k(s)u}\cdot P(u)du-\\ &-\sum_{j=k+1}^{r}a_j\cdot(1-\beta_j(s))\int_0^t e^{-p_k(s)v}dv\cdot\int_0^{t-v}e^{-b_{k,j}p_k^{j-1}(s)u}d_uP\left(\left(1-(b_j/b_k)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)\Bigg\} \end{aligned} \qquad (18)$$

Далее,

$$\frac{dp_k(s)}{ds}=1+\sum_{i=1}^{k}a_i\frac{d}{ds}\left(\int_0^{\infty}e^{-sx}dB_i(x)\right)\geq 1-\sum_{i=1}^{k}a_i\beta_{i1}\geq 1-\rho_1>0,\ k=1,2,\ldots,r,\ s>0,$$

где дифференцирование по s под интегралом допустимо из-за равномерной сходимости продифференцированного интеграла. Значит, $p_k(s)$ при $s>0$ возрастает, что из-за $p_k(0)=0$ дает $p_k(s)>0$ при $s>0$. Тогда при $k=1,2,\ldots,r$ и $s>0$

$$\lim_{t\to+\infty}\exp(p_k(s)\cdot t)=+\infty.$$

Если $g(t)=f(t)\cdot q(t)$ ограничено, $\lim_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$, то $\lim_{t\to+\infty}q(t)=0$. Поэтому из (18), неравенств $0\leq v_k(s,t)\leq 1$ ($v_k(s,t)$ – преобразование Лапласа-Стильтьеса функции распределения неотрицательной случайной величины), вытекают равенства

$$\begin{aligned} 1=&s\cdot\int_0^{\infty}e^{-p_k(s)u}P(u)du+\\ &+\sum_{j=k+1}^{r}a_j(1-\beta_j(s))\int_0^{\infty}e^{-p_k(s)v}dv\cdot\int_0^{\infty}e^{-b_{k,j}p_k^{j-1}(s)u}d_uP\left(\left(1-(b_j/b_k)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right) \end{aligned}. \ (19)$$

Здесь учтена неотрицательность подынтегральных функций в интегралах правой части (18).

Далее, интегрирование в (18) по (u, v) производится в области $\{(u, v): u \ge 0,\ v \ge 0,\ u + v < t\}$, дополнение которой в положительном квадранте есть D_t. Поэтому из (18) и (19) следуют равенства (17). ►

При $\varepsilon > \delta > 0$ и $0 \le \alpha < 1$ обозначим (зависимость от α не указана)

$$A_j(\varepsilon, \delta, t) = \int_0^t e^{-\delta v} dv \cdot \int_{t-v}^{\infty} e^{-\varepsilon u} P((1-\alpha) w_j(v) < u) du,$$

$$B_j(\varepsilon, \delta, t) = \int_t^{\infty} e^{-\delta v} dv \cdot \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon u} P((1-\alpha) w_j(v) < u) du,$$

$$C_j(\varepsilon - \delta, t) = \int_0^1 e^{-(\varepsilon-\delta) y} P((1-\alpha) w_j(t-y) < y) dy.$$

Лемма 2. Если при $j = k+1, k+2, \dots, r$ и $s \ge 0$ существуют пределы (13), то

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \cdot A_j(\varepsilon, \delta, t) = \frac{\omega_j((1-\alpha)(\varepsilon - \delta))}{\delta \cdot (\varepsilon - \delta)}, \tag{20}$$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \cdot B_j(\varepsilon, \delta, t) = 0, \tag{21}$$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \cdot C_j(\varepsilon - \delta, t) = \frac{\omega_j((1-\alpha)(\varepsilon - \delta))}{(\varepsilon - \delta)}. \tag{22}$$

Доказательство. При $\tau > 0$ и $\mu > 0$ произведем выкладки

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu t} C_j(\tau, t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(\tau+\mu) y} dy \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu(t-y)} P((1-\alpha) w_j(t-y) < y) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\tau+\mu) y} dy \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu x} P((1-\alpha) w_j(x) < y) dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\mu x} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\tau+\mu) y} P((1-\alpha) w_j(x) < y) dy =$$

$$= \frac{1}{\tau + \mu} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \omega_j((1-\alpha)(\tau + \mu), x) dx. \tag{23}$$

При $\mu \in (0, \mu_0]$, где $\mu_0 > 0$, справедливы неравенства

$$\omega_j((1-\alpha)(\tau + \mu_0), x) \le \omega_j((1-\alpha)(\tau + \mu), x) \le \omega_j((1-\alpha)\tau, x),$$

$$j = k+1, k+2, \dots, r, \quad x \ge 0.$$

Следовательно, при $j = k+1, k+2, \dots, r$, по простейшей тауберовой теореме,

$$\omega_j((1-\alpha)(\tau + \mu_0)) = \lim_{\mu \downarrow 0} \mu \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \omega_j((1-\alpha)(\tau + \mu_0), x) dx \le$$

$$\le \underline{\lim}_{\mu \downarrow 0} \mu \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \omega_j((1-\alpha)(\tau + \mu), x) dx \le \overline{\lim}_{\mu \downarrow 0} \mu \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \omega_j((1-\alpha)(\tau + \mu), x) dx \le$$

$$\le \lim_{\mu \downarrow 0} \mu \cdot \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \omega_j((1-\alpha)\tau, x) dx = \omega_j((1-\alpha)\tau).$$

Устремляя $\mu_0 \downarrow 0$, получаем существование при $j = k+1, k+2, \dots, r$ пределов

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \mu \cdot \int_0^\infty e^{-\mu x} \omega_j\big((1-\alpha)(\tau+\mu), x\big)dx = \omega_j\big((1-\alpha)\tau\big). \qquad (24)$$

Теперь, из (23) - (24), снова используя тауберову теорему, выводим при $j = k+1, k+2, \dots, r$

$$\lim_{t \to +\infty} C_j(\tau, t) = \lim_{\mu \downarrow 0} \mu \cdot \int_0^\infty e^{-\mu t} C_j(\tau, t)dt = \tau^{-1} \lim_{\mu \downarrow 0} \mu \cdot \int_0^\infty e^{-\mu x} \omega_j\big((1-\alpha)(\tau+\mu), x\big)dx =$$

$$= \frac{\omega_j\big((1-\alpha)\tau\big)}{\tau},$$

откуда при $\tau = \varepsilon - \delta$ следует (22).

В формулах (14) и (15) положим

$$f(v, y) = e^{-\delta v - \varepsilon y} P\big((1-\alpha)w_j(v) < y\big),$$

т.е. соответственно

$$F(t) = A_j(\varepsilon, \delta, t) \qquad \text{и} \qquad F(t) = A_j(\varepsilon, \delta, t) + B_j(\varepsilon, \delta, t).$$

Тогда соответственно получаем

$$F'(t) = \varepsilon^{-1} e^{-\delta t} w_j\big((1-\alpha)\varepsilon, t\big) - e^{-\delta t} C_j(\varepsilon - \delta, t)$$

и

$$F'(t) = -e^{-\delta t} C_j(\varepsilon - \delta, t).$$

Следовательно, используя правило Лопиталя и (22), находим

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \cdot A_j(\varepsilon, \delta, t) = (\varepsilon\delta)^{-1} \lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \omega_j\big((1-\alpha)\varepsilon, t\big) + \lim_{t \to +\infty} \delta^{-1} C_j(\varepsilon - \delta, t) =$$

$$= \frac{\omega_j\big((1-\alpha)(\varepsilon-\delta)\big)}{\delta \cdot (\varepsilon - \delta)},$$

что доказывает (20), и

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \cdot \big(A_j(\varepsilon, \delta, t) + B_j(\varepsilon, \delta, t)\big) = \lim_{t \to +\infty} \delta^{-1} C_j(\varepsilon - \delta, t) = \frac{\omega_j\big((1-\alpha)(\varepsilon-\delta)\big)}{\delta \cdot (\varepsilon - \delta)},$$

откуда и из (20) следует (21). ▸

Лемма 3. Если при $j = k+1, k+2, \dots, r$ и $s \geq 0$ существуют пределы (13), то

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \iint_{D_t} e^{-\delta v - \varepsilon u} d_u P\big((1-\alpha)w_j(v) < u\big)dv =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta v} dv \cdot \int_{t-v}^\infty e^{-\varepsilon u} d_u P\big((1-\alpha)w_j(v) < u\big) = \frac{\omega_j(1-\alpha)(\varepsilon-\delta)}{\delta}. \qquad (25)$$

Доказательство. Интегрированием по частям внутренних интегралов и последующей заменой $v = t - y$ в одном из интегралов ниже получаем равенство

$$e^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta v} dv \cdot \int_{t-v}^\infty e^{-\varepsilon u} d_u P\big((1-\alpha)w_j(v) < u\big) = \varepsilon e^{\delta t} A_j(\varepsilon, \delta, t) - C_j(\varepsilon - \delta, t).$$

Аналогично,

$$e^{\delta t} \int_t^\infty e^{-\delta v} dv \cdot \int_0^\infty e^{-\varepsilon u} d_u P\big((1-\alpha)w_j(v) < u\big) = \varepsilon e^{\delta t} B_j(\varepsilon, \delta, t).$$

Далее, представляя $\iint\limits_{D_t}$ по (16) в виде суммы двух интегралов, из выписанных равенств выводим

$$e^{\delta t}\iint\limits_{D_t} e^{-\delta v-\varepsilon u} d_u P((1-\alpha)w_j(v)<u)dv=$$
$$=\varepsilon\, e^{\delta t}\left(A_j(\varepsilon,\delta,t)+B_j(\varepsilon,\delta,t)\right)-C_j(\varepsilon-\delta,t).$$

Пусть при $j=k+1,k+2,\dots,r$ и $s\geq 0$ существуют пределы (13). Переходя в полученных равенствах к пределу $t\to+\infty$ и используя (20) - (22), получаем (25). ▸

<u>Доказательство теоремы 3</u>. Положим

$$\delta=p_k(s),\quad \varepsilon=b_{k,j}\,p_k^{j-1}(s),\quad \alpha=(b_j/b_k)^{1/\gamma}$$

(зависимость от $s\geq 0$, k и $j=k+1,k+2,\dots,r$ не указана). Нетрудно видеть, что

$$b_{k,j}q_{k-1}(s)=\varepsilon-\delta=b_{k,j}\cdot(b_j)^{1/\gamma}\left(\frac{p_{k-1}(s)}{(b_k)^{1/\gamma}}+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{a_i}{(b_i)^{1/\gamma}}(1-\beta_i(s))\right)>0$$

при $s>0$ и $j=k+1,k+2,\dots,r$, где напомним, что $q_{k-1}(s)=p_{k-1}^{k-1}(s)$.

Пусть пределы (13) существуют при $j=k+1,k+2,\dots,r$ и $s\geq 0$. Тогда из (25) при $j=k+1,k+2,\dots,r$ и $s\geq 0$ получаем

$$\lim_{t\to+\infty} e^{p_k(s)t}\cdot\iint\limits_{D_t} e^{-p_k(s)v-b_{k,j}p_k^{j-1}(s)u} d_u P\left(\left(1-(b_j/b_k)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)dv=$$
$$=\lim_{t\to+\infty} e^{p_k(s)t}\cdot\int_0^t e^{-p_k(s)v}dv\int_{t-v}^{\infty} e^{-b_{k,j}p_k^{j-1}(s)u} d_u P\left(\left(1-(b_j/b_k)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)= \quad (26)$$
$$=\frac{\omega_j\left((b_j/b_k)^{1/\gamma}q_{k-1}(s)\right)}{p_k(s)}.$$

Так как

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=1-\rho_1 \text{ при } \rho_1<1,$$

то, по правилу Лопиталя, при $\rho_1<1$ выводим

$$\lim_{t\to+\infty} e^{p_k(s)t}\cdot\int_t^{\infty} e^{-p_k(s)u}P(u)du=\frac{1-\rho_1}{p_k(s)},\ s\geq 0. \quad (27)$$

При заданном по индуктивному предположению k в (17) переходим к пределу $t\to+\infty$. Тогда, в силу (26) и (27) при заданном k существует предел (9), где

$$v_k(s)=\frac{1}{p_k(s)}\left\{(1-\rho_1)s+\sum_{j=k+1}^{r}a_j(1-\beta_j(s))\omega_j\left((b_j/b_k)^{1/\gamma}q_{k-1}(s)\right)\right\},\ s\geq 0. \quad (28)$$

Следовательно, согласно (5), при заданном k существует предел (13), причем

$$\omega_k(s)=\lim_{t\to+\infty}v_k(m_{k-1}(s),t)=v_k(m_{k-1}(s)),\ s\geq 0. \quad (29)$$

Итак, пределы (13) существуют при всех $j=1,2,\dots,k$ и $s\geq 0$, а значит, (28) - (29) справедливы при $k=1,2,\dots,r$ и $s\geq 0$.

В силу (1), если $\rho_1<1$, то

$q_{k-1}(m_{k-1}(s))\equiv s$ при всех $k=1,2,\dots.,r$, $s\geq 0$.

Поэтому из (28) - (29) следует (8). ▸

Доказательство теоремы 4. Существование пределов (28) и (9) установлено в теореме 3 при $\rho_1 < 1$.

Формулы (6) при $k = 1,2,\ldots,r-1$, $t \ge 0$, $s \ge 0$ можно представить в виде

$$v_k(s,t) = v_{k+1}(s,t) + a_{k+1}\left(1 - \beta_{k+1}(s)\right)e^{p_k(s)t} \cdot$$
$$\cdot \int_0^t e^{-p_k(s)v}dv \cdot \int_{t-v}^{\infty} e^{-b_{k,j}q_{k-1}(s)\cdot u} d_u P\left(\left(1-\left(b_{k+1}/b_k\right)^{1/\gamma}\right)w_{k+1}(v) < u\right).$$

Переходя в них к пределу $t \to +\infty$ и используя (26) с $j = k+1$, выводим (10). ▸

На основе теорем 3 и 4 выводятся уравнения (11) и (12), определяющие средние стационарные времена ожидания ω_{k1}, $k = 1,2,\ldots,r$.

Выведем систему (11).

При $k = 1,2,\ldots,r$ и $s \ge 0$ обозначим

$$b_k(s) = \frac{1-\beta_k(s)}{s\beta_{k1}}, \quad a_k(s) = \frac{p_k(s)}{s} = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\beta_{i1}(s),$$

где, как легко видеть,

$$b_k(0) = 1,\ a_k(0) = 1 - \rho_{k1}.$$

Далее, представим систему (28) в виде

$$a_k(s)\cdot v_k(s) = 1 - \rho_1 + \sum_{j=k+1}^{r} a_j\beta_{j1}b_j(s)\omega_j\left(\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma} q_{k-1}(s)\right),\ k = 1,2,\ldots,r,\ s \ge 0. \quad (30)$$

Дифференцированием в нуле получаем равенства: при $k = 1,2,\ldots,r$ и $j = k+1, k+2,\ldots,r$

$$\left.\frac{db_k(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\frac{\beta_{k2}}{2\beta_{k1}}, \qquad \left.\frac{da_k(s)}{ds}\right|_{s=0} = \rho^0_{k2}, \qquad \left.\frac{dq_k(s)}{ds}\right|_{s=0} = 1 - \rho_{k1},$$

$$\left.\frac{d\left(a_k(s)v_k(s)\right)}{ds}\right|_{s=0} = \rho^0_{k2} - \left(1-\rho^0_{k1}\right)\omega_{k1},$$

$$\left.\frac{d\omega_j\left(\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma} q_{k-1}(s)\right)}{ds}\right|_{s=0} = -\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}\left(1-\rho_{k-11}\right)\omega_{j1},$$

$$\left.\frac{d\left(\sum_{j=k+1}^{r} a_j\beta_{j1}b_j(s)\omega_j\left(\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma} q_{k-1}(s)\right)\right)}{ds}\right|_{s=0} = -\rho_{r2} + \rho^0_{k2} - \left(1-\rho_{k-11}\right)\sum_{j=k+1}^{r} a_j\beta_{j1}\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}\omega_{j1},$$

где

$$\rho^0_{k2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} a_i\beta_{i2},\ \ v_{k1} = \int_0^{\infty} x dP\left(v_k < x\right).$$

Теперь, дифференцируя обе части (30) в нуле и используя приведенные равенства, при $k = 1,2,\ldots,r$ получаем

$$\left(1-\rho^0_{k1}\right)v_{k1} = \rho_{r2} + \left(1-\rho_{k-11}\right)\cdot \sum_{j=k+1}^{r} a_j\beta_{j1}\cdot\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}\cdot\omega_{j1}. \quad (31)$$

С другой стороны, из равенства $\omega_k(s) = v_k\left(m_{k-1}(s)\right)$ и (1) имеем

$$\left.\frac{dm_{k-1}(s)}{ds}\right|_{s=0}=\frac{1}{1-\rho_{k-11}}$$ и, значит, $v_{k1}=(1-\rho_{k-11})\omega_{k1}$, $k=1,2,...,r$,

откуда и из (31) следует система (11). ▸

Выведем систему (12).

Используем уравнения (10), представленные при $k=1,2,...,r-1$ и $s\geq 0$ в виде

$$a_k(s)\cdot v_k(s)=a_k(s)v_{k+1}(s)+b_{k+1}(s)\cdot\omega_{k+1}\left(\left(b_{k+1}/b_k\right)^{1/\gamma}q_{k-1}(s)\right).$$

Дифференцированием этих уравнений в нуле и использованием ранее полученных неравенств при $k=1,2,....,r-1$ находим

$$\left(1-\rho_{k1}^0\right)v_{k1}=\left(1-\rho_{k1}^0\right)v_{k+11}-\frac{1}{2}a_{k+1}\beta_{k+12}-\left(1-\rho_{k-11}\right)a_{k+1}\beta_{k+11}\cdot\left(b_{k+1}/b_k\right)^{1/\gamma}\omega_{k+11},$$

что вместе с неравенствами $v_{j1}=(1-\rho_{k-11})\omega_{k+11}$, $j=1,2,...,r$, легко приводится к виду (12). ▸

Одно обобщение. Для вектор-процессов

$$\{(w_k(t);\eta_{k+1\ k}(t),...,\eta_{r\,k}(t)):t\geq 0\},\ k=1,2,...,r, \text{ и } \{(v_k(t);\eta_{k+1\ k}(t),...,\eta_{r\,k}(t)):t\geq 0\},$$

имеет место ключевое уравнение

$$E\exp\{-s^{(k)}w_k(t)-\sum_{j=k+1}^{r}s^{(j)}\eta_{jk}(t)\}=E\exp\{-m_{k-1}(s^{(k)})v_k(t)-\sum_{j=k+1}^{r}s^{(j)}\eta_{jk}(t)\},\quad (32)$$

где $k=1,2,...,r$, $t\geq 0$, $s_k\geq 0,...,s_r\geq 0$ $s^{(k)}=s_k+s_{k+1}+...+s_r$, $\eta_{jk}(t)$, $j=k+1,k+2,...,r$, есть суммарное время обслуживания j-вызовов, находящихся в очереди в момент t, которые будут обслужены после момента $t+w_k(t)$;

При $k=1,2,...,r$, $n-1=k,k+1,...,j$, $j=k+1,k+2,...,r-1$ и $s_k\geq 0$,..., $s_r\geq 0$ обозначим $s^{(k)}=s_k+s_{k+1}+...+s_r$ и

$$p_{k,n-1}=p_{k,n-1}(s^{(k)},...,s^{(n-1)})=s^{(k)}-\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot(1-\beta_i(s^{(k)}))-\sum_{i=k+1}^{n-1}a_i\cdot(1-\beta_i(s^{(i)})),$$

$$p_{k,n-1}^{j-1}=p_{k,n-1}^{j-1}(s^{(k)},...,s^{(n-1)})=s^{(k)}-\sum_{i=1}^{k}a_{ij-1}\cdot(1-\beta_i(s^{(k)}))-\sum_{i=k+1}^{n-1}a_{ij-1}\cdot(1-\beta_i(s^{(i)})).$$

Для вектор-процессов от виртуальных времен ожидания имеют место теоремы.

Теорема 5. При любых $k=1,2,...,r$, $t\geq 0$, $s_k\geq 0$,..., $s_r\geq 0$ справедливы равенства

$$E\exp\{-s^{(k)}v_k(t)-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}(t)\}=e^{p_{k,r}\cdot t}\cdot\{1-s^{(k)}\cdot\int_0^t e^{-p_{k,r}\cdot u}\cdot P(u)du-$$

$$-\sum_{j=k+1}^{r}a_j\cdot(1-\frac{s^{(j)}}{s^{(k)}})(1-\beta_j(s^{(k)}))\cdot\int_0^t e^{-p_{k,r}\cdot v}dv\cdot\int_0^{b_{k,j}(t-v)}e^{-p_{k,j-1}^{j-1}\cdot u}d_uE(\exp(-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\cdot\eta_{ij}(v)):w_j(v)<u)\},$$

(33)

где $E(\xi:A)$ – математическое ожидание случайной величины ξ на событии A.

Теорема 6. При любых $k=1,2,...,r$, $t\geq 0$, $s_k\geq 0,...,s_r\geq 0$ справедливы равенства

$$E\exp\{-s^{(k)}v_k(t)-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}(t)\}=\omega(s^{(k)},t)+\sum_{j=k+1}^{r}a_j\cdot(1-\frac{s^{(j)}}{s^{(k)}})(1-\beta_j(s^{(k)}))\cdot$$
$$\cdot\sum_{n=k+1}^{j}\int_0^t e^{p_{k,n-1}\cdot y}dy\cdot\int_{b_{n-1,j}y}^{b_{n,j}y}e^{-p_{k,n-1}^{j-1}\cdot u}d_uE(\exp\{-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\cdot\eta_{ij}(t-y)\}:w_j(t-y)<u).$$

Пусть η_{jk}, $j=k+1,k+2,...,r$ - стационарное суммарное время обслуживания j -вызовов из очереди в момент поступления в модель k -вызова, обслуженных после данного k -вызова.

Из теоремы 5 и ключевого уравнения (32) выводится

Теорема 7. Пусть $\rho_1<1$. При $k=1,2,...,r$ и $s_k\ge 0,...,s_r\ge 0$ существуют пределы

$$E\exp\{-s^{(k)}\cdot v_k-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}\}=\lim_{t\to+\infty}E\exp\{-s^{(k)}v_k(t)-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}(t)\},\quad(34)$$

$$E\exp\{-s^{(k)}\cdot w_k-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}\}=\lim_{t\to+\infty}E\exp\{-s^{(k)}w_k(t)-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}(t)\},\quad(35)$$

причем

$$E\exp\{-s^{(k)}\cdot w_k-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}\}=E\exp\{-m_{k-1}(s^{(k)})v_k-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}\},\quad(36)$$

$$E\exp\{-s^{(k)}\cdot v_k-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}\}=\frac{1}{p_{k,r}}\cdot\{(1-\rho_1)s^{(k)}+\sum_{j=k+1}^{r}a_j(1-\frac{s^{(j)}}{s^{(k)}})(1-\beta_j(s^{(k)}))\}\cdot$$
$$\cdot E\exp\{-(p_{k,j-1}^{j-1}-(1-(b_j/b_k)^{1/\gamma})p_{k,r})w_j-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}\}.\quad(37)$$

Из теоремы 6 выводится

Теорема 8. Пусть $\rho_1<1$. При $k=1,2,...,r$ и $s_k\ge 0,...,s_r\ge 0$ справедливы равенства

$$E\exp\{-s^{(k)}\cdot v_k-\sum_{i=k+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ik}\}=\frac{(1-\rho_1)\cdot s^{(k)}}{p_{r,r}(s^{(k)})}+\sum_{j=k+1}^{r}a_j(1-\frac{s^{(j)}}{s^{(k)}})(1-\beta_j(s^{(k)}))\cdot$$
$$\cdot\sum_{n=k+1}^{j}\frac{1}{p_{k,n-1}}\cdot\{E\exp\{-(p_{k,n-1}^{j-1}-(1-(b_j/b_{n-1})^{1/\gamma})p_{k,n-1})w_j-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}\}\}.$$

Поскольку в модели Клейнрока в случае двух потоков

$E\exp\{-s^{(1)}\cdot v_1-s^{(2)}\eta_{21}\}=E\exp\{-s_1v_1-s_2v_2\}$,

то теоремы 7–8 определяют в модели $M_2|G_2|1|\infty$ ФР вектора (w_1,w_2).

При $\rho_1<1$ индукцией докажем существование пределов

$$E\exp\left\{-s^{(k)}w_j-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}\right\}=\lim_{t\to+\infty}E\exp\left\{-s^{(j)}w_j(t)-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(t)\right\}\quad(38)$$

при $j=1,2,...,r$ и $s^{(j)}\ge 0$, что равносильно слабой сходимости

$$\lim_{t\to+\infty}P(w_j(t)<x_j,\eta_{ij}(t)<x_i,i=j+1,j+2,...,r)=P(w_j<x_j,\eta_{ij}<x_i,i=j+1,j+2,...,r)$$

Основание индукции $k=r$ очевидно (см. п. 2).

Индукционное предположение: пределы (38) существуют при

$$j = k+1, k+2, \ldots, r \text{ и } s^{(j)} \geq 0.$$

Доказательство теоремы 7.

Пусть пределы (38) существуют при $j = k+1, k+2, \ldots, r$, $s^{(j)} \geq 0$.

Так как $p_k(s)$ по s при $s > 0$ строго возрастает, то справедлива цепочка неравенств

$$p_{k,r}\left(s^{(k)}, \ldots, s^{(r)}\right) \geq p_{k+1,r}\left(s^{(k+1)}, \ldots, s^{(r)}\right) \geq \ldots \geq p_{r,r}\left(s^{(r)}\right) > 0,$$

где при $s^{(k)} > 0$ хотя бы одно из неравенств является строгим. Следовательно, при $s^{(k)} > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \exp\left(p_{r,k}\left(s^{(k)}, \ldots, s^{(k)}\right)t\right) = +\infty. \qquad (39)$$

Тогда с учетом (39) из (19) при $t \to +\infty$ и $s^{(k)} > 0$ получаем

$$1 = s^{(k)} \int_0^\infty e^{-p_{k,r} \cdot u} P(u) du - \sum_{j=k+1}^r a_j \left(1 - \frac{s^{(j)}}{s^{(k)}}\right)\left(1 - \beta_j\left(s^{(k)}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-p_{k,r} \cdot v} dv \cdot \int_0^\infty e^{-b_{k,j} p_{k,r-1} \cdot u} d_u E\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^r s^{(i)} \cdot \eta_{ij}(v)\right) : \left(1 - \left(b_j / b_k\right)^{1/\gamma}\right) w_j(v) < u\right),$$

откуда и из (33) при $\rho_1 < 1$ следует равенство

$$E \exp\left\{-s^{(k)} v_k(t) - \sum_{i=k+1}^r s^{(i)} \eta_{ik}(t)\right\} = e^{p_{k,r} \cdot t} \left\{s^{(k)} \int_t^\infty e^{-p_{k,r} \cdot u} P(u) du + \right.$$

$$+ \sum_{j=k+1}^r a_j \left(1 - \frac{s^{(j)}}{s^{(k)}}\right)\left(1 - \beta_j\left(s^{(k)}\right)\right) \cdot \qquad (40)$$

$$\left. \cdot \iint_{D_t} e^{-p_{k,r} \cdot v - b_{k,j} p_{k,j-1}^{j-1} u} d_u E\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^r s^{(i)} \cdot \eta_{ij}(v)\right) : \left(1 - \left(b_j / b_k\right)^{1/\gamma}\right) w_j(v) < u\right) dv\right\},$$

где D_t определено формулой (16).

При $\varepsilon > \delta > 0$ и $0 \leq \alpha < 1$ обозначим (зависимость от α и $s_{j+1}, \ldots, s_r$ не указана)

$$A_j(\varepsilon, \delta, t) = \int_0^t e^{-\delta v} dv \int_{t-v}^\infty e^{-\varepsilon u} E\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^r s^{(i)} \eta_{ij}(v)\right) : (1-\alpha) w_j(v) < u\right) du,$$

$$B_j(\varepsilon, \delta, t) = \int_t^\infty e^{-\delta v} dv \int_0^\infty e^{-\varepsilon u} E\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^r s^{(i)} \eta_{ij}(v)\right) : (1-\alpha) w_j(v) < u\right) du,$$

$$C_j(\varepsilon - \delta, t) = \int_0^t e^{-(\varepsilon - \delta) y} E\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^r s^{(i)} \eta_{ij}(t-y)\right) : (1-\alpha) w_j(t-y) < y\right) dy.$$

Аналогично лемме 2 доказывается при $j = k+1, k+2, \ldots, r$ и $s_k \geq 0, \ldots, s_r \geq 0$ существование пределов

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\delta t} \cdot A_j(\varepsilon, \delta, t) = \frac{E \exp\left\{-(1-\alpha)(\varepsilon - \delta) w_j - \sum_{i=j+1}^r s^{(i)} \eta_{ij}\right\}}{\delta(\varepsilon - \delta)}, \qquad (41)$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\delta t}\cdot B_j(\varepsilon,\delta,t)=0\,, \tag{42}$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\delta t}\cdot C_j(\varepsilon-\delta,t)=\frac{E\exp\left\{-(1-\alpha)(\varepsilon-\delta)w_j-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}\right\}}{\varepsilon-\delta}. \tag{43}$$

Интегрированием по частям внутренних интегралов и последующей заменой $v=t-y$ в одном из интегралов ниже получаем равенство

$$e^{\delta\cdot t}\cdot\int_0^t e^{-\delta\cdot v}dv\cdot\int_{t-v}^{\infty} e^{-\varepsilon\cdot u}d_uE\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right):(1-\alpha)w_j(v)<u\right)=$$

$$=\varepsilon e^{\delta t}A_j(\varepsilon,\delta,t)-C_j(\varepsilon-\delta,t).$$

Аналогично,

$$e^{\delta t}\cdot\int_t^{\infty} e^{-\delta v}dv\cdot\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon u}d_uE\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right):(1-\alpha)w_j(v)<u\right)=\varepsilon e^{\delta t}B_j(\varepsilon,\delta,t).$$

Из этих равенств, как и в п. 2, выводим

$$e^{\delta\cdot t}\cdot\iint_{D_t} e^{-\delta\cdot v-\varepsilon\cdot u}d_uE\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right):(1-\alpha)w_j(v)<u\right)dv=$$

$$=\varepsilon\cdot e^{\delta\cdot t}\left(A_j(\varepsilon,\delta,t)+|\,B_j(\varepsilon,\delta,t)\right)-C_j(\varepsilon-\delta,t).$$

Переходя в полученных равенствах к пределу $t\to+\infty$ и используя (41) - (43), получаем

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\delta\cdot t}\cdot\iint_{D_t} e^{-\delta\cdot v-\varepsilon\cdot u}d_uE\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right):(1-\alpha)w_j(v)<u\right)dv=$$

$$=\lim_{t\to+\infty} e^{\delta\cdot t}\cdot\int_0^t e^{-\delta\cdot v}dv\int_{t-v}^{\infty} e^{-\varepsilon\cdot u}d_uE\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right):(1-\alpha)w_j(v)<u\right)= \tag{44}$$

$$=\delta^{-1}\cdot E\exp\left\{-(1-\alpha)(\varepsilon-\delta)w_j-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}\right\}.$$

Положим

$$\delta=p_{k,r}\left(s^{(k)},...,s^{(r)}\right),\ \varepsilon=b_{k,j}\,p_{k,j-1}^{j-1}\left(s^{(k)},...,s^{(j-1)}\right),\ \alpha=\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}.$$

Так как $p_{k,j-1}\ge p_{k,j}\ge\ldots\ge p_{k,r}>0$ при $s^{(k)}>0$, то

$$\varepsilon-\delta=b_{k,j}\left(\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}p_{k,j-1}+(b_j)^{1/\gamma}\cdot\sum_{i=k+1}^{j-1}\frac{a_i}{(b_i)^{1/\gamma}}\left(1-\beta_i\left(s^{(t)}\right)\right)\right)+\sum_{i=j}^{r}a_i\left(1-\beta_i\left(s^{(t)}\right)\right)>0$$

при $s^{(k)}>0$, $j=k+1,k+2,...,r$.

Теперь из (44) при $j=k+1,k+2,...,r$ ***и*** $s_k\ge 0,...,s_r\ge 0$ ***получаем***

$$\lim_{t\to+\infty} e^{p_{k,r}\cdot t}\iint_{D_t} e^{-p_{k,t}\cdot v-b_{k,j}p_{k,j-1}^{j-1}\cdot u}d_uE\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right):\left(1-\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)dv=$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{p_{k,r}\cdot t}\cdot\int_0^t e^{-p_{k,t}\cdot v}dv\int_{t-v}^{\infty} e^{-b_{k,j}p_{k,j-1}^{j-1}\cdot u}d_u E\left(\exp\left(-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right):\left(1-\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)=$$

$$=\frac{1}{p_{k,r}}E\exp\left\{-\left(p_{k,j-1}^{j-1}-\left(1-\left(b_j/b_k\right)^{1/\gamma}\right)p_{k,r}\right)w_j-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}\right\}. \qquad (45)$$

При заданном k (по индукционному предположению) в (40) переходим к пределу $t\to+\infty$. Тогда, в силу (45) и (12), где $p_k(s)$ заменено на $p_{k,r}$, при заданном k существует предел (34), причем для функции

$$E\exp\left\{-s^{(k)}v_k-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}\right\},\ s_k\ge 0,\dots,s_r\ge 0,$$

справедливо равенство (37).

Следовательно, при $\rho_1<1$ и $t\to+\infty$, в силу (32), выводим равенства (36) и обосновываем одновременно существование предела (35) при заданном k. В силу метода математической индукции, справедлива теорема 7. ▸

Доказательство теоремы 8.

Согласно теореме 7, существуют пределы (34) и (35) и остается осуществить предельный переход в уравнениях теоремы 6, которые мы запишем в следующем виде

$$E\exp\left\{-s^{(k)}v_k(t)-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(t)\right\}=\omega\left(s^{(k)},t\right)+\sum_{j=k+1}^{r}a_j\cdot\left(1-\frac{s^{(j)}}{s^{(k)}}\right)\left(1-\beta_j\left(s^{(k)}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=k+1}^{j}e^{p_{k,n-1}\cdot t}\cdot\int_0^t e^{-p_{k,n-1}\cdot v}dv\left\{\int_{t-v}^{\infty}e^{-b_{n-1,j}p_{k,n-1}^{j-1}\cdot u}d_uE\left(\exp\left\{-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right\}:\left(1-\left(b_j/b_{n-1}\right)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)-\right.$$

$$\left.-\int_{t-v}^{\infty}e^{-b_{n,j}p_{k,n-1}^{j-1}\cdot u}d_uE\left(\exp\left\{-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right\}:\left(1-\left(b_j/b_n\right)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)\right\}. \qquad (46)$$

В (44) при $\rho_1<1$ и $s_k\ge 0,\dots,s_r\ge 0$ полагаем

$$\delta=p_{k,n-1},\qquad \varepsilon=b_{m,j}p_{k,n-1}^{j-1},\qquad \alpha=\left(b_j/b_m\right)^{1/\gamma},$$

где $j=k+1,k+2,\dots,r$, $m=k+1,k+2,\dots,j$, $m=n-1,n$. При этом, легко проверяется, что $\varepsilon>\delta>0$, если $s^{(k)}>0$. Имеем

$$\lim_{t\to+\infty}e^{p_{k,n-1}\cdot t}\cdot\int_0^t e^{-p_{k,n-1}\cdot v}dv\cdot\int_{t-v}^{\infty}e^{-b_{m,j}p_{k,n-1}^{j-1}\cdot u}d_uE\left(\exp\left\{-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}(v)\right\}:\left(1-\left(b_j/b_m\right)^{1/\gamma}\right)w_j(v)<u\right)=$$
$$=\frac{1}{p_{k,n-1}}E\exp\left\{-\left(p_{k,n-1}^{j-1}-\left(1-\left(b_j/b_m\right)^{1/\gamma}\right)p_{k,n-1}\right)w_j-\sum_{i=j+1}^{r}s^{(i)}\eta_{ij}\right\} \qquad (47)$$

Перейдем при $\rho_1<1$, $s_k\ge 0,\dots,s_r\ge 0$ в (46) к пределу $t\to+\infty$. Используя (47) и равенство

$$\lim_{t\to+\infty}\omega\left(s^{(k)},t\right)=\frac{\left(1-\rho_1\right)\cdot s^{(k)}}{p_{r,r}\left(s^{(k)}\right)},\quad s^{(k)}\ge 0,$$

получаем формулы теоремы 8. ▸

Заключение. Полученные в статье результаты новые и могут быть применены в прикладных задачах, посвященных моделированию в технических, информационно-вычислительных, экономических, биологических и многих других системах.

Примечания:

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979. 600 с.
2. Симонян А.Р., Улитина Е.И. О параметрических моделях массового обслуживания // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12. В. 1. С. 184–185.
3. Симонян А.Р., Улитина Е.И. Нестационарные характеристики в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т. 17 В. 1. С. 57–80.
4. Даниелян Э.А. Об одной системе с динамическими приоритетами // Ученые записки ЕГУ. 1980. №3. С. 19–25.
5. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966. 243 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 751 с.
7. Симонян А.Р., Симонян Э.А. Оптимальное упорядочение параметров модели Клейнрока // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10. В. 1. С. 23–24.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 616 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 810 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 662 с.

UDC 519.217

Stationary Waiting Time in Kleinrock's Model with Non-linear Function of Priority

[1] Arsen R. Simonyan
[2] Rafik A. Simonyan
[3] Elena I. Ulitina
[4] Vladimir G. Ushakov

[1] Sochi State University, Russia
Sovetskaya street, 26a, Sochi sity, Krasnodar Krai, 354000
PhD (physica & mathematica), Assistant Professor
E-mail: oppm@mail.ru
[2] Krasnodar State University, Russia
Stavropolskaya street, 149, Krasnodar sity, 350040
[3] Sochi State University, Russia
Sovetskaya street, 26a, Sochi sity, Krasnodar Krai, 354000
PhD (physica&mathematica), Assistant Professor
E-mail: ulitinaelena@mail.ru
[4] Moscow State University, Russia
Leninskie Gory, 1-52, Moscow, GSP-1, 119991
Dr. (physica&mathematica), Professor
E-mail: ushakov@comtv.ru

Abstract. The article presents new accurate results for stationary virtual waiting time in Kleirock's model with non-linear function of priority. Further these results were extended to vector-processes, relevant to major characteristics of mass service systems. The conditions, at which stationary characteristics of Kleirock's model with non-linear function of priority exist, were proved. All the results for major characteristics of the model were obtained in terms of Laplace transformation, which simplifies the further conclusions of asymptotic results for these characteristics of the model and the ones, related to them.

Keywords: Theory of mass service; waiting time; loading; distributional function; Kleirock's model.