

УДК 624.072

## Экспериментальные характеристики поперечных колебаний консольных стержней различных форм

<sup>1</sup> Евгений Николаевич Пересыпкин

<sup>2</sup> Светлана Алексеевна Кирия

<sup>3</sup> Елена Евгеньевна Юрченко

<sup>4</sup> Евгений Анатольевич Юрченко

<sup>1</sup> Сочинский государственный университет, Россия  
354000, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а  
Доктор технических наук, профессор  
E-mail: pen40@rambler.ru

<sup>2</sup> НОУ гимназия «Школа бизнеса», Россия  
354000, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Чехова  
Кандидат педагогических наук, учитель физики  
E-mail: sakirija@yandex.ru

<sup>3</sup> Сочинский государственный университет, Россия  
354000, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а  
Кандидат технических наук, доцент  
E-mail: wsonormalno@yandex.ru

<sup>4</sup> Сочинский государственный университет, Россия  
354000, Краснодарский край, г. Сочи, ул. Советская, 26 а  
Старший преподаватель  
E-mail: wsonormalno@yandex.ru

**Аннотация.** В статье рассмотрены причины неточностей в расчетном определении частот собственных колебаний конструкций зданий, обуславливающих возникновение «беспокоящей вибрации». Приведены результаты экспериментального определения частот и времени затухания колебаний стержней сложной формы. Для простых случаев, имеющих теоретическое решение, дано сопоставление экспериментальных и расчетных данных, подтверждающее достаточную эффективность использованной экспериментальной методики. Этот метод может быть с успехом применен в натурных обследованиях конструкций и в дальнейшей аналитической обработке результатов.

**Ключевые слова:** динамические характеристики конструкций; вибрации; экспериментальные данные для сложных форм.

**Введение.** Внутренние органы человеческого тела имеют низкую собственную частоту колебаний (порядка 4–6 Гц). Обычная ходьба по полу дает частоту 2,5 Гц, бег и прыжки 3–4 Гц. Если собственная частота колебаний органов тела человека совпадет с частотой колебаний пола, то может произойти резонанс, проявляющийся у людей неприятными ощущениями при прыжках, быстрой ходьбе. Это называется «беспокоящей вибрацией». Для устранения «беспокоящих вибраций» наиболее низкая собственная частота конструкций пола должна быть 8 Гц. Объяснению причин «беспокоящих вибраций», иногда возникающих в новых зданиях, посвящена данная работа.

**Материалы и методы.** Измерение или вычисление частот собственных колебаний (ЧСК) имеет большое практическое значение при расчетах конструкций на действие удара, взрыва, землетрясения, вибрации. Эти воздействия характеризуются как быстро меняющиеся во времени, направлении и месте приложения. Если частота собственных колебаний конструкции будет иметь такую же частоту, что и внешнее воздействие, то в конструкции возникнет резонанс, сопровождаемый резким возрастанием амплитуды колебаний вплоть до разрушения. В технике знание диапазона ЧСК (спектра ЧСК) конструкции, по сравнению с эталонным, служит для обнаружения дефекта.

Вместе с тем вычисление ЧСК реальных конструкций трудоемко, поэтому в практических расчетах применяют упрощенные модели конструкций, имеющие поперечные сечения в виде простых геометрических фигур.

Оценку допустимости тех или иных упрощений можно получить аналитически в относительно простых случаях, численно с применением ЭВМ в более сложных случаях, либо экспериментально. Последний метод необходим как критерий достоверности расчетных построений, как в простых, так и в сложных случаях.

В данной работе материалом исследования являются стержневые конструкции разного поперечного сечения и разного очертания продольного профиля. Метод исследования – экспериментально-теоретический, состоящий в экспериментальном определении динамических характеристик натуральных конструкций и обосновании примененной экспериментальной методики на образцах, для которых есть аналитические решения (периоды колебаний по собственным формам, декременты колебаний и другие).

**Обсуждение проблемы.** При проектировании зданий и сооружений на динамические воздействия простейшей расчетной моделью [1] является консольный стержень с сосредоточенными в уровнях перекрытий массами стен и перекрытий. Жесткость стержня равна суммарной жесткости вертикальных несущих конструкций (стен, колонн) в пределах этажа. Такая модель характеризуется числом степеней свободы, равным числу сосредоточенных масс.

Система с распределенной массой обладает бесконечным числом степеней свободы. Для ограничения его используют подход, альтернативный модели с сосредоточенными массами. Он основан на допущении, что любая форма изгиба сооружения может быть представлена в виде суммы простых форм перемещений, например,

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (1)$$

где  $x$  – переменная координата по длине конструкции;  $L$  – длина конструкции;  $b_n$  – коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Рассматривая амплитуды  $b_n$  этих синусоид в качестве обобщенных координат системы (или степеней свободы) и ограничивая число членов ряда (1), можно хорошо аппроксимировать форму изгиба реальной конструкции конечным рядом и, таким образом, конечным числом степеней свободы. Как правило, при одинаковом числе степеней свободы точность динамического расчета в методе форм деформаций (иначе, деформаций по собственным формам) выше, чем в методе сосредоточенных масс.

В настоящее время основным методом моделирования деформаций любых сооружений через конечное число координат перемещений является метод, основанный на методе конечного элемента. Он наиболее эффективен при расчетах с помощью ЭВМ.

Однако любой расчет реальных сооружений сопряжен с определенными упрощениями. В аналитических методах приходится вводить упрощения в геометрию тел, распределение нагрузок, граничные условия, ибо в противном случае система определяющих уравнений становится трудноразрешимой, либо неразрешимой. В численных методах, в том числе в методе конечных элементов, неизбежны ограничения, связанные с числом и типами конечных элементов, идеализацией их сопряжений. Неудачно введенные упрощения приводят к значительным погрешностям в величинах динамических характеристик конструкций. Частным примером такой расчетной погрешности является случай, когда фактические частоты колебаний несущих конструкций перекрытия оказались в отличие от расчетных в диапазоне «беспокоящих вибраций» человека.

Теоретическое уравнение движения материальной точки конструкции при свободном колебании в достаточно общем случае имеет вид:

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2} - r \frac{dy}{dt} - cy = 0, \quad (2)$$

где  $m$  – погонная распределенная масса конструкции (размерность кг/м);  $r$  – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления среды и скоростью движения конструкции (размерность кг/(м\*с));  $c$  – коэффициент пропорциональности между восстанавливающей силой упругости и величиной смещения рассматриваемой точки относительно положения равновесия (размерность кг/(м\*с<sup>2</sup>));  $y$  – поперечное перемещение конструкции в рассматриваемой точке.

Первое слагаемое в уравнении (2) – сила инерции, противоположная вектору ускорения; второе слагаемое – сила сопротивления среды, противоположная вектору

скорости; третье слагаемое – сила упругости, противоположная вектору смещения. Поэтому они все в уравнении записаны со знаком минус.

Разделив обе части уравнения (2) на  $(-m)$  и введя обозначения

$$\frac{r}{m} = 2n \text{ (размерность } n \text{ (1/c)), } \quad \frac{c}{m} = k^2 \text{ (размерность } k \text{ (1/c)),}$$

приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + k^2 y = 0. \quad (3)$$

Для интегрирования уравнения (3) воспользуемся заменой переменной

$$y = \xi e^{-nt}. \quad (4)$$

Дифференцируя (4) по времени, получим

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\xi}{dt} e^{-nt} + \xi(-n)e^{-nt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 \xi}{dt^2} e^{-nt} - n \frac{d\xi}{dt} e^{-nt} - n \frac{d\xi}{dt} e^{-nt} + \xi n^2 e^{-nt}. \quad (5)$$

Подстановка (4) и (5) в (3) приводит к уравнению

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + (k^2 - n^2)\xi = 0$$

или после замены  $\omega^2 = k^2 - n^2$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega^2 \xi = 0. \quad (6)$$

Полученное уравнение описывает гармоническое колебание, его решение дается выражением

$$\xi = a \sin(\omega t + \varphi). \quad (7)$$

С учетом формулы (4) конечное выражение для решения уравнения (3) предстает в форме

$$y = a e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi), \quad (8)$$

где  $a$  – начальная амплитуда колебаний; множитель  $e^{-nt}$  быстро уменьшается с течением времени, определяя затухание колебаний;  $\omega = (k^2 - n^2)^{1/2}$  – круговая частота колебаний, то есть число циклов колебаний за  $2\pi$  сек;  $\varphi$  – начальная фаза свободных колебаний.

В момент времени  $t=0$

начальное смещение (из (8))

$$y_0 = a \sin \varphi, \quad (9)$$

начальная скорость (производная от (8) по  $t$ )

$$v_0 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = a e^{-nt} [\omega \cos(\omega t + \varphi) - n \sin(\omega t + \varphi)] \Big|_{t=0} = \\ = a \omega \cos \varphi - a n \sin \varphi = a \omega \cos \varphi - n y_0. \quad (10)$$

Из (9) и (10) имеем

$$a \sin \varphi = y_0, \quad a \cos \varphi = (v_0 + n y_0) / \omega,$$

откуда следует

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + n y_0)^2}{\omega^2}}, \quad (11)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0}. \quad (12)$$

Из периодичности функции (8) отыскивается период колебаний  $T$ . Поскольку период синусоиды  $2\pi$ , то

$$[\omega(t+T) + \varphi] - (\omega t + \varphi) = 2\pi, \quad \omega T = 2\pi, \quad T = 2\pi / \omega. \quad (13)$$

Период  $T$  – это время, в течение которого совершается полное колебание. Величина  $f = 1/T = \omega / (2\pi)$ , обратная периоду колебаний, является числом колебаний в единицу времени и называется частотой.

В рассматриваемом случае  $\omega = (k^2 - n^2)^{1/2}$  – круговая частота затухающего колебания, описываемого формулой (8). Если сопротивление колебаниям отсутствует ( $n=0$ ), то колебание становится незатухающим

$$\omega \Big|_{n=0} = \omega_0 = k \quad \text{и} \quad y = a \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (14)$$

Очевидно, в общем случае  $\omega=(k^2-n^2)^{1/2}<k$  и потому  $2\pi/\omega>2\pi/k=2\pi/\omega_0$ , то есть, период затухающих колебаний  $T=2\pi/\omega$  больше периода незатухающих колебаний  $T_0=2\pi/\omega_0$ . Так как период затухающих колебаний зависит не только от свойств материала конструкции ( $c$ ), но и от свойств среды ( $n=r/(2m)$ ), его в отличие от периода незатухающих колебаний  $T_0$  называют условным периодом колебаний ( $T$ ).

Найдем натуральный логарифм отношения двух соседних максимумов амплитуд свободного колебания (8):

$$\delta=\ln[y(t)/y(t+T)]=\ln[e^{-nt}/e^{-n(t+T)}]=\ln e^{nT}=nT. \quad (12)$$

Величина  $\delta$ , характеризующая скорость затухания колебаний, называется логарифмическим декрементом колебаний, а параметр  $n=r/(2m)$  – коэффициентом затухания.

Если не учитывать затухание колебаний, то есть принять  $n=0$ , то согласно (14)

$$\omega|_{n=0}=\omega_0=k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{11}p}}=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}, \quad (15)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $y_{cm}=\delta_{11}p$  – статический прогиб конструкции под действующей погонной нагрузкой  $p=mg$ ;  $\delta_{11}$  – статическое перемещение конструкции в рассматриваемом сечении от единичной нагрузки, определяемое из выражения  $\delta_{11}^*c=1$ , в котором  $c$  – жесткостная характеристика конструкции, или ее реакция, вызванная единичным смещением.

Для консольной балки с сосредоточенной массой на конце консоли статический прогиб равен  $y_{cm}=Pl^3/(3EI)$ . Так как  $P=mlg$ , то  $y_{cm}=mgl^4/(3EI)$  и

$$\omega|_{n=0}=\omega_0=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}=\sqrt{\frac{3EIg}{mgl^4}}=\frac{\sqrt{3}}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad f=\omega/(2\pi)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}=\frac{\alpha^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \alpha^2=3^{1/2}=1,73.$$

В случае консольной балки с равномерно распределенной массой статический прогиб в центре масс (т. е. в середине консоли) будет равен

$$y_{cm}=pl^4/(24EI)=mgl^4/(24EI),$$

а соответственно круговая частота  $\omega$  и частота колебаний  $f$  получают значения

$$\omega|_{n=0}=\omega_0=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}}=\sqrt{\frac{24EIg}{mgl^4}}=\frac{\sqrt{24}}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad f=\omega/(2\pi)=\frac{\sqrt{24}}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}=\frac{\alpha^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \alpha^2=24^{1/2}=4,9,$$

где  $\alpha^2$  – коэффициент, зависящий от условий закрепления конструкции и характера распределения ее массы по длине.

Учтем в последнем случае затухание колебаний

$$\omega=(k^2-n^2)^{1/2}=\sqrt{\frac{c}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}=\sqrt{\frac{g}{y_{cm}}-\frac{r^2}{4m^2}}=\sqrt{\frac{24EI}{ml^4}-n^2}.$$

Реальная величина «вязкости» среды, определяющей процесс затухания колебаний, в большинстве случаев может быть определена только из опыта. Примем в первом приближении, что сопротивление среды колебаниям и потери на трение в месте заземления консоли вследствие податливости заделки составляют 50% от величины первого слагаемого под радикалом ( $n^2=r^2/(4m^2)=12EI/(ml^2)$ ). Тогда

$$\omega=(k^2-n^2)^{1/2}=\sqrt{\frac{24EI}{ml^4}-n^2}=\sqrt{\frac{12EI}{ml^4}}=\frac{\sqrt{12}}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$f=\omega/(2\pi)=\frac{\sqrt{12}}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}=\frac{\alpha^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \alpha^2=\sqrt{12}=3,464. \quad (16)$$

Величина  $\alpha^2=3,464$  близка к известному значению этого параметра в различных литературных источниках (например, [1] – таблица 25, стр. 151:  $\alpha^2=3,515$ ). Очевидно, для определения этого параметра в сложных случаях, когда сложна геометрия конструкции или не поддаются аналитической оценке факторы сопротивления колебаниям, достаточно экспериментально определить частоту колебаний конструкции. В частности, при исследовании разрабатываемых деталей газотурбинной техники иногда используются методы определения форм колебаний с помощью голографической интерферометрии, которые позволяют выявлять сложные формы колебаний в широком диапазоне частот.






В данной работе рассмотрены колебания консольных стержней, продольная ось которых была очерчена по кривым, соответствующим пяти первым формам колебаний прямолинейного консольного стержня. Стержни были свиты из двух стальных проволок диаметром 0,5 мм, вылет консоли составлял 0,26 м. Испытывался также стержень, свитый из двух проволок так, что на трех участках длиной по 5 см проволоки раздвинуты на расстояние до 5 см, в результате чего получилась цепь с прямыми и эллипсовидными участками.

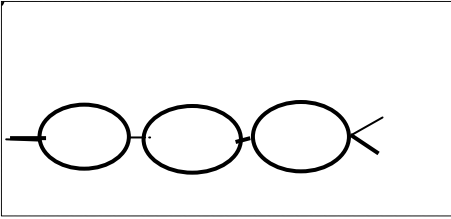
Методика эксперимента была использована та же, что и в работе [2]. Измерение частот собственных колебаний балок производилось с помощью металлоискателя, соединенного с микрофонным усилителем и компьютером в режиме осциллографа. Из записанных осциллограмм определялся период колебаний, их длительность до затухания, коэффициент затухания и логарифмический декремент колебаний.

Результаты измерений периода колебаний, вычислений логарифмического декремента и коэффициента затухания сведены в нижеследующей таблице.

Таблица

**Результаты экспериментов со стержнями разной формы**

№ испытания	Эскиз схемы эксперимента	Условный период колебаний T, с	Декремент колебаний $\delta$	$n = \delta/T = \gamma/(2m)$ , $c^{-1}$
1	прямой стержень 	0,0199	1,96	98,49
2	стержень выгнут по 1-й форме колебаний 	0,0204	1,79	87,75
3	стержень выгнут по 3-й форме колебаний 	0,0201	1,02	50,75
4	стержень выгнут по 4-ой форме колебаний 	0,0232	0,98	42,24
5	стержень выгнут по 5-й форме колебаний 	0,0186	0,27	14,52

6	стержень типа цепь	0,0196	0,25	12,76
				

Из данных таблицы видно, что:

- ни у одного из выгнутых стержней нет характеристик, равных по значениям прямолинейному стержню, следовательно, применение его в качестве модели, заменяющей криволинейные, недостоверно, и это может привести к расчетным ошибкам и резонансным или близким к ним явлениям. Кроме того, недостоверность характеристик колебаний даст и ложные сведения о способности конструкции к затуханию колебаний;
- самый сложный по форме стержень – цепь, для которого нет теоретических характеристик колебаний, имеет значения  $T$ ,  $\delta$ ,  $n$ , близкие к стержню, выгнутому по 5-й форме колебаний прямолинейного стержня. Отсюда следует еще один практический вывод: возможно сопоставление сложного по форме стержня с известной формой колебания более простого стержня, для которого известны теоретические параметры колебаний, а значит, возможен контроль экспериментальных данных.

**Заключение.** Расчетное моделирование сложных конструктивных элементов простыми во многих случаях невозможно, поскольку приводит к ошибочным значениям динамических характеристик. Возможность моделирования сложных элементов более простыми, хотя и тоже относительно сложными, устанавливается только на основе эксперимента.

#### Примечания:

1. Корчинский И.Л. Основы проектирования зданий в сейсмических районах. М.: ГИЛ по САиСМ, 1961. 488 с.
2. Пересыпкин Е.Н., Юрченко Е.Е., Юрченко Е.А «Экспериментальное исследование поперечных колебаний стержней» // Известия Сочинского государственного университета. 2012. N 3(21). С. 121–124.

UDC 624.072

### Experimental Characteristics of Lateral Oscillation of Cantilever Bars of Different Shapes

<sup>1</sup> Evgenie N. Peresyppkin

<sup>2</sup> Svetlana A. Kirija

<sup>3</sup> Elena E. Jurchenko

<sup>4</sup> Evgenie A. Jurchenko

<sup>1</sup> Sochi state university, Russia  
354000, Krasnodar territory, Sochi, street Soviet, 26 a  
Dr. (Technical), Professor  
E-mail: pen40@rambler.ru

<sup>2</sup> НОУ а grammar school "Business school", Russia  
354000, Krasnodar territory, Sochi, Chekhov's street  
PhD (Pedagogy)  
E-mail: sakirija@yandex.ru

<sup>3</sup> Sochi state university, Russia  
354000, Krasnodar territory, Sochi, street Soviet, 26 a

PhD (Technical), Senior lecturer

E-mail: wsonormalno@yandex.ru

<sup>4</sup> Sochi state university, Russia

354000, Krasnodar territory, Sochi, street Soviet, 26 a

Senior teacher

E-mail: wsonormalno@yandex.ru

**Abstract.** The article is concerned with the reasons of inaccuracies in estimated natural vibration frequency of building structures, causing “annoying vibration”. The results of experimental determination of frequency and time of compound-bar oscillation damping are presented. For simple cases, having theoretical solutions, the comparison of experimental and estimated data, proving sufficient efficiency of the used experimental technique was made. This method can be successfully used for constructions on-site investigations and for the further analytical processing of the results.

**Keywords:** dynamic characteristics of the constructions; vibrations; experimental data for compound shapes.